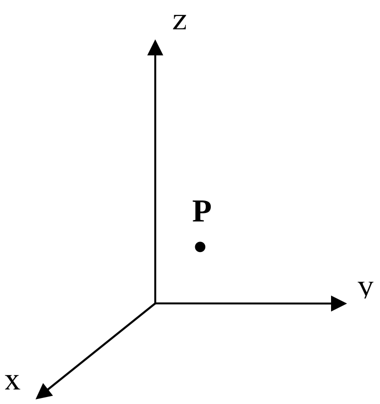
Esercizi di riepilogo di elettrostatica e magnetostatica

ESERCIZIO 1

Dato il potenziale elettrostatico:

$$V(x,y,z) = 3e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}\ln(y^2 + 2x) + 5(z^2 + zy) \quad [\mathrm{V}]$$

calcolare la forza agente su un elettrone posto nel punto P(3,2,5).
Si ricorda che la carica dell'elettrone è pari a q = -1.6 10^{-19} C.



Soluzione

Data la relazione che lega potenziale e campo elettrico: $\vec{E} = -\nabla V$, si ottengono le componenti del campo elettrico in x, y e z:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\left[3\left(-\frac{1}{2}2x\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{y^2+2x}2\right]\Bigg|_P \cong 0.1 - 0.1 \cong 0 \quad [\mathrm{V/m}]$$

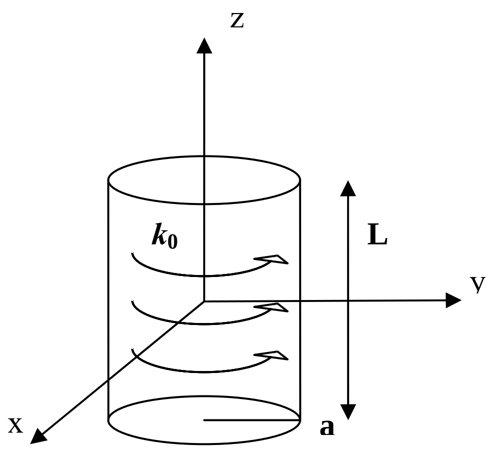
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\left[\frac{1}{2}\frac{1}{y^2+2x}\,2y + 5z\right]\Bigg|_P = -0.2 - 25 = -25.2 \quad [\mathrm{V/m}]$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -[5(2z + y)]\big|_P = -60 \quad [\mathrm{V/m}]$$

La forza agente sull'elettrone in P è quindi: $\vec{F} = q\,\vec{E}(P) = q\left(-25.2\overrightarrow{a_y} - 60\overrightarrow{a_z}\right)$ [N].
Il modulo della forza è quindi pari a circa 1,04 10^{-17} [N].

ESERCIZIO 2

Dato il cilindro cavo in figura percorso da una densità di corrente superficiale costante k_0 [A/m] (la corrente scorre sulla superficie laterale del cilindro nel verso indicato in figura), calcolare il campo $\vec{B}$ sull'asse z.



<u>Soluzione</u>

Per un anello di cilindro infinitesimo si ha (dalla formula del campo magnetico dato da una spira di corrente):

$$dB_z = \frac{\mu_0\, dI\, a^2}{2\left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{con} \quad dI = k_0 dz \text{ per un anello in } z = z' \text{ si ha} \quad dB_z = \frac{\mu_0\, k_0\, a^2 dz'}{2\left[a^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Per ottenere il campo totale si integra su tutto il cilindro:

$$B_z = \frac{\mu_0 a^2 k_0}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{\left[a^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Applicando la sostituzione: $(z - z') = \frac{1}{t} \Rightarrow -dz' = -\frac{1}{t^2}dt$, e definendo $H = \frac{\mu_0 a^2 k_0}{2}$, si ottiene:

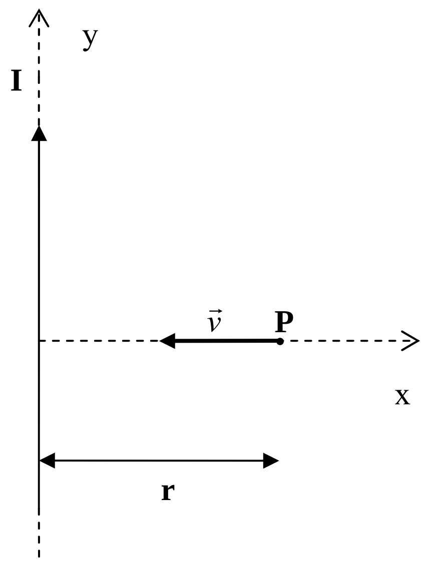
$$B_z = H \int_{\frac{1}{z+L/2}}^{\frac{1}{z-L/2}} \frac{dt}{t^2\left(a^2 + \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = H \int_{\frac{1}{z+L/2}}^{\frac{1}{z-L/2}} \frac{dt}{t^2\,\frac{\left(a^2t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{t^3}} = H \int_{\frac{1}{z+L/2}}^{\frac{1}{z-L/2}} \frac{t}{\left(a^2t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}dt = -\frac{H}{a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right]_{\frac{1}{z+L/2}}^{\frac{1}{z-L/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 k_0}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{(z+L/2)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{(z-L/2)^2}}}\right) = \frac{\mu_0 k_0}{2}\left(\frac{L/2+z}{\sqrt{(z+L/2)^2+a^2}} + \frac{L/2-z}{\sqrt{(z-L/2)^2+a^2}}\right) \quad [\text{T}]$$

Quindi il campo totale sull'asse è $\vec{B} = B_z \overrightarrow{a_z}$ [T]

ESERCIZIO 3

Per il sistema in figura, costituito da un filo indefinito percorso da corrente I = 2 A, da un elettrone posto in P che viaggia verso il filo a velocità $\vec{v} = -0.1\, c\, \overrightarrow{a_x}$ (c = la velocità della luce nel vuoto) a distanza r = 30 cm da esso, calcolare l'accelerazione a cui è sottoposto l'elettrone (direzione e modulo). Si ricorda che la carica dell'elettrone è pari a q = -1.6 10^{-19} C e che la sua massa è m_e = 9.1 10^{-31} kg.



<u>Soluzione</u>

Il campo generato dal filo è:

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}\overrightarrow{a_z} \quad [\mathrm{T}]$$

Dalla formula della forza di Lorenz si ha:

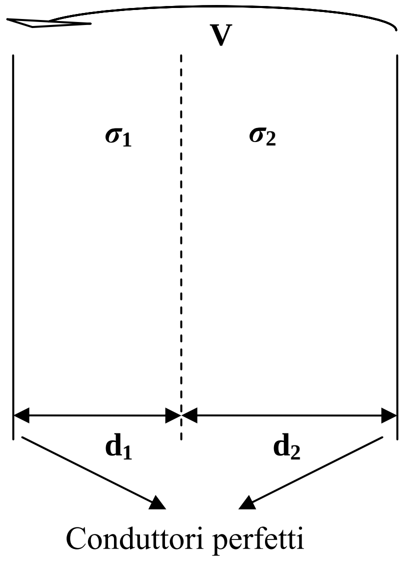
$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = -qv\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}\overrightarrow{a_y} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = 6{,}4 \cdot 10^{-18}\,\overrightarrow{a_y} \quad [\mathrm{N}]$$

Dalla seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m_e \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} \cong 7 \cdot 10^{12}\,\overrightarrow{a_y} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

ESERCIZIO 4

Per la struttura in figura, calcolare il campo elettrico nelle 2 regioni di spazio caratterizzati da conducibilità σ_1 e σ_2. calcolare inoltre la densità di carica superficiale sulla discontinuità fra i due materiali.



$\sigma_1 = 2.5$ S/m
$\sigma_2 = 3$ S/m
$d_1 = 0.02$ m
$d_2 = 0.05$ m
$S = 5\ 10^{-4}\ m^2$
V = 2 V

S = superficie armature

Soluzione

Si possono vedere le due regioni di spazio come due conduttori caratterizzati da resistenze proprie e la resistenza totale, essendo la serie delle resistenze, è data da $R_T = R_1 + R_2$.

Le due resistenze valgono:

$$R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S} = 16 \quad [\Omega] \qquad\qquad R_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 S} = 33{,}3 \quad [\Omega]$$

La corrente che scorre è:

$$I = \frac{\Delta V}{R_T} = \frac{\Delta V\ S}{\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}} = 0{,}0405 \quad [\text{A}]$$

Si può dunque calcolare la densità di corrente:

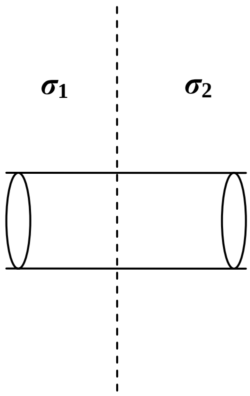
$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = J\,S \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\Delta V}{\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}} = \frac{\Delta V \sigma_1 \sigma_2}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} \quad [\text{A/m}^2]$$

Poiché $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, si ha:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \frac{\sigma_2\,\Delta V}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} = 32{,}4 \quad [\text{V/m}]$$

$$\left|\vec{E}_2\right| = \frac{\sigma_1\,\Delta V}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} = 27{,}03 \quad [\text{V/m}]$$

Applicando il teorema di Gauss a un piccolo cilindro posto in modo tale da attraversare la superficie di separazione dei due materiali (vedi figura):



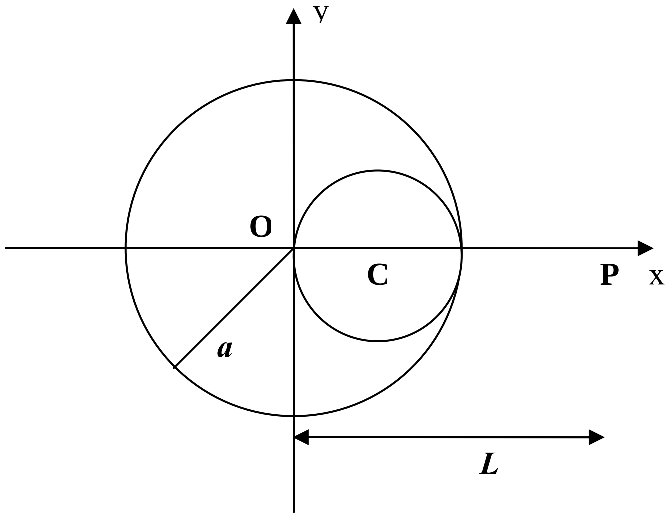
$$\left(E_2 - E_1\right)A = \frac{\rho_s A}{\varepsilon_0}$$

Da cui si ricava la distribuzione di cariche superficiali come:

$$\rho_S = \frac{\varepsilon_0 \, \Delta V \left(\sigma_2 - \sigma_1\right)}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1} = 4{,}78 \cdot 10^{-11} \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il conduttore cilindrico indefinito di raggio *a* percorso da corrente *I* uniforme, uscente dal foglio, caratterizzato da una cavità di raggio *a*/2. Calcolare il campo $\vec{B}$ in O, C e P.
Traccia di soluzione: la struttura è equivalente ad un conduttore pieno di raggio *a* e ad uno di raggio *a*/2 al posto della cavità avente la stessa densità di corrente entrante nel foglio.



a = 80 cm
I = 2 A
L = 1.5 m
C (a/2, 0)
P (L, 0)

Soluzione
Si utilizza la sovrapposizione degli effetti, considerando dapprima (caso 1) il filo senza la cavità, come cioè tutto percorso da corrente e si calcola il campo da esso generato. Poi si considera (caso 2) la sola cavità percorsa da una densità di corrente uguale ed opposta in verso a quella del problema, in modo che la somma delle 2 correnti all'interno della cavità sia nulla.

Si ricava la densità di corrente $J = \dfrac{I}{(\pi\, a^2) - (\pi \frac{a^2}{4})}$ (dal momento che la corrente è uniforme)

Utilizzando il teorema di Ampere (circonferenze centrate in O, con raggio r_1, corrente uscente dal foglio) e considerando il conduttore pieno:

Per $r_1 < a$: $\quad 2\pi\, r_1\, B_1 = \mu_0 I_{interna} = \mu_0 J\pi\, r_1^2 \quad \Rightarrow \quad B_1(r_1) = \mu_0 \dfrac{J}{2} r_1$

Per $r_1 > a$: $\quad B_1(r_1) = \mu_0 \dfrac{J \cdot a^2}{2\, r_1}$

Utilizzando ancora il teorema di Ampere (circonferenze centrate in *C*, con raggio r_2, corrente entrante nel foglio, il campo $\vec{B}_2$ avrà quindi verso contrario al campo $\vec{B}_1$):

Per $r_2 < a/2$: $\quad B_2(r_2) = \mu_0 \dfrac{J}{2} r_2$

Per $r_2 > a/2$: $\quad B_2(r_2) = \mu_0 \dfrac{J \cdot a^2}{8\, r_2}$

Per ottenere il campo totale in *O*, *C* e *P*, basta sommare i 2 campi trovati, sostituendo le espressioni letterali con le coordinate numeriche dei punti, facendo attenzione alle diverse direzioni dei campi.

Si ottiene:

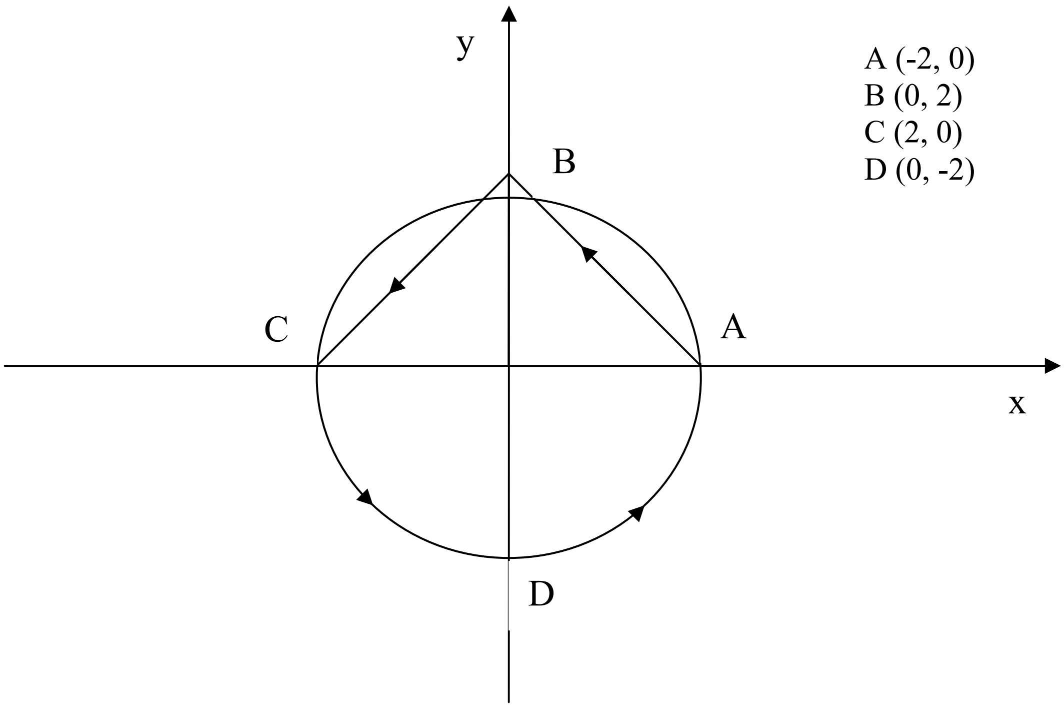
$$\vec{B}(O) = \vec{B}_1(O) + \vec{B}_2(O) = 3{,}33 \cdot 10^{-7}\, \overrightarrow{a_y} \quad [\mathrm{T}]$$

$$\vec{B}(C) = \vec{B}_1(C) + \vec{B}_2(C) = 3{,}33 \cdot 10^{-7}\, \overrightarrow{a_y} \quad [\mathrm{T}]$$

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) = 2{,}34 \cdot 10^{-7}\, \overrightarrow{a_y} \quad [\mathrm{T}]$$

ESERCIZIO 6

Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $\vec{A} = (y + 2z)\overrightarrow{a_x} + (3x + 2z)\overrightarrow{a_y} + (2x + 2z)\overrightarrow{a_z}$ lungo la linea chiusa A-B-C-D in figura (verso antiorario).



Dal Teorema di Stokes:

$$\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Calcoliamo il rotore:

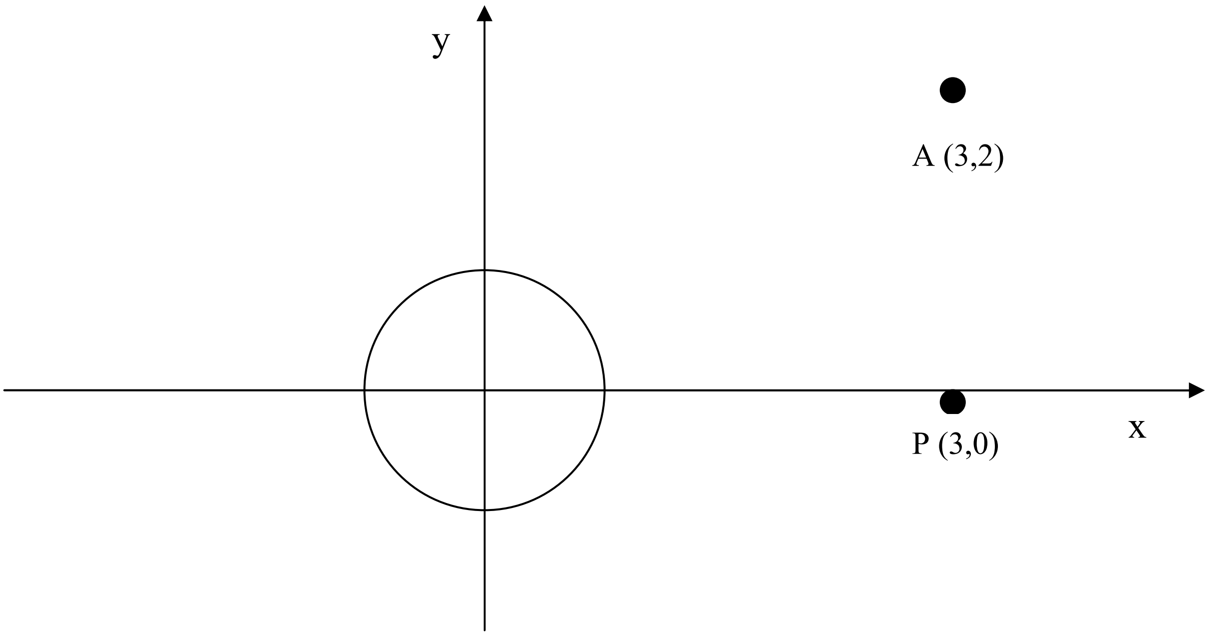
$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y + 2z & 3x + 2z & 2x + 2z \end{vmatrix} = -2\overrightarrow{a_x} + 2\overrightarrow{a_z}$$

Per cui si ricava:

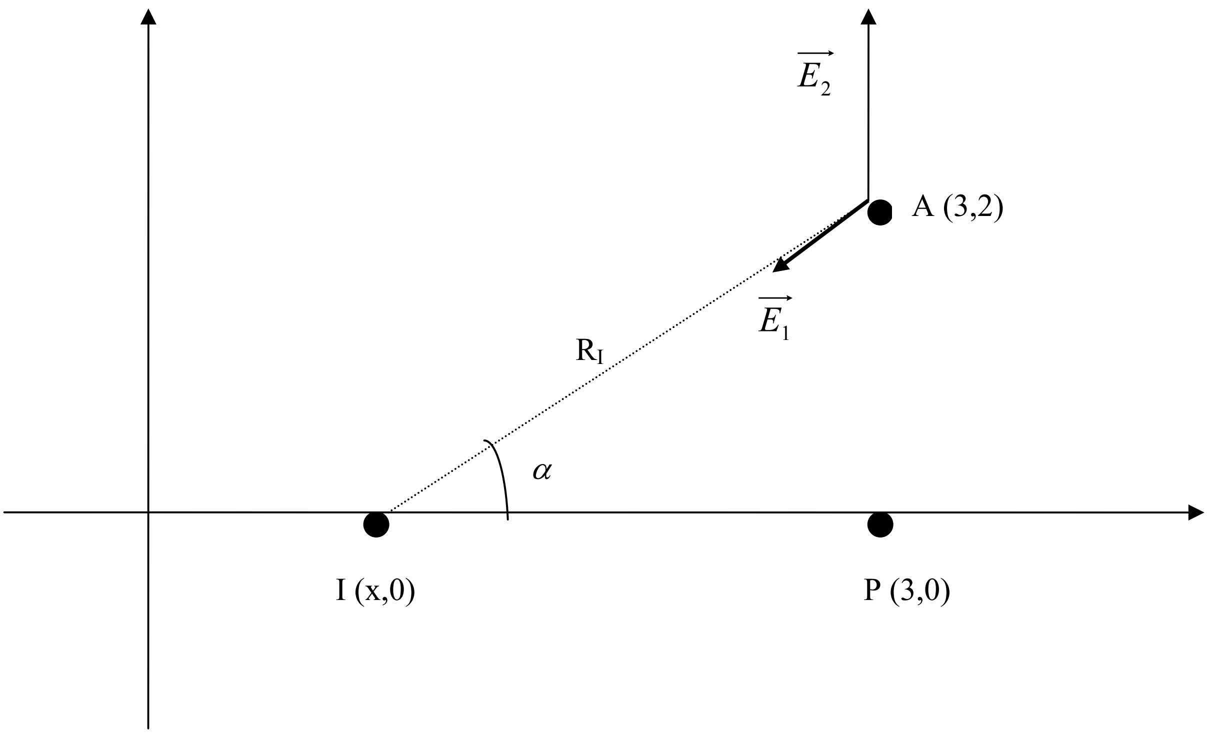
$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S (-2\overrightarrow{a_x} + 2\overrightarrow{a_z}) \cdot \overrightarrow{a_z} dS = 2\int_S dS = 2(4 + 2\pi) = 20{,}57$$

ESERCIZIO 7

Dato un cilindro conduttore di raggio R pari a 1 metro, mantenuto a potenziale nullo (V = 0 V) e centrato nell'origine degli assi ed una carica filiforme Q di valore 10^{-12} [Coulomb/m] posta nel punto P, determinare il campo elettrico nel punto A.



L'esercizio si risolve applicando il metodo delle cariche immagini:



La carica immagine viene posta nel punto I; il suo valore è pari a $Q' = -Q = -10^{-12}$ [C/m]. L'ascissa del punto I si determina tramite l'equazione:

$$x = d' = \frac{R^2}{d} = \frac{1}{3} \text{ [m]}$$

Si ha quindi:

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{a_y} \text{ con } r = 2 \text{ m}$$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 R_I}\cos(\alpha)\overrightarrow{a_x} + \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 R_I} sen(\alpha)\overrightarrow{a_y} \text{ con}$$

$R_I = 3{,}3 \text{ m}$

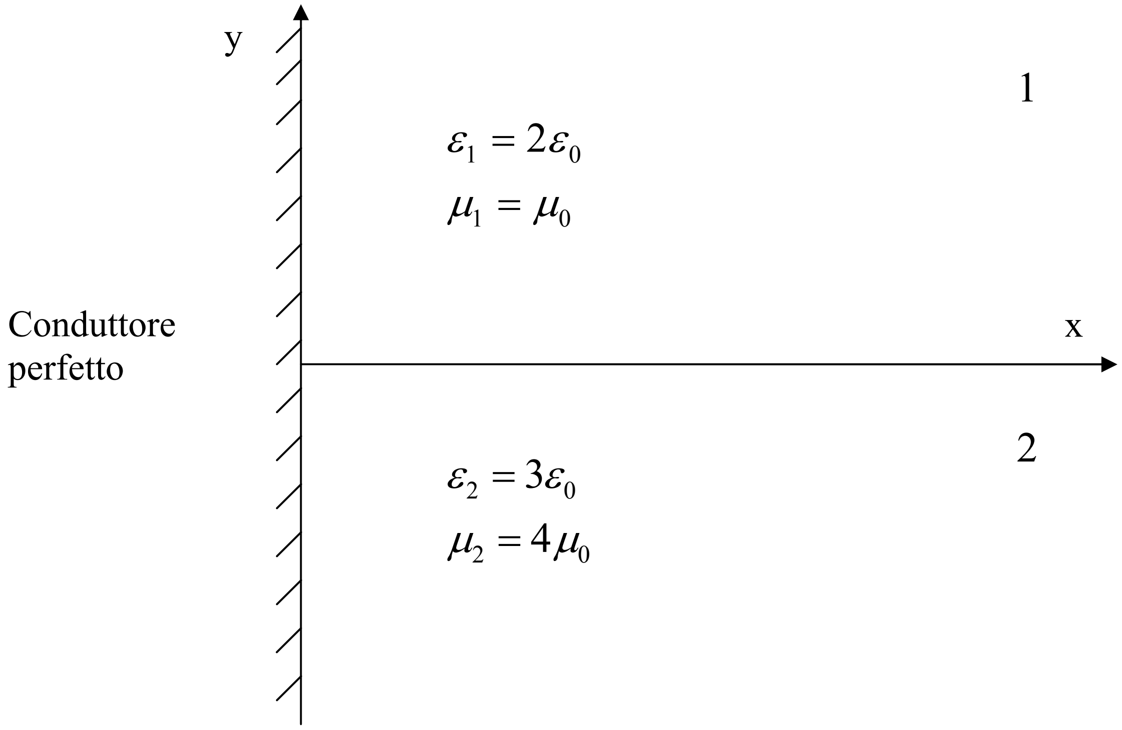
$\cos(\alpha) = 0.8$

$sen(\alpha) = 0.6$

$$\vec{E}(A) = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = -0.0044\overrightarrow{a_x} + 0.0057\overrightarrow{a_y} \quad \text{[V/m]}$$

ESERCIZIO 8

Dato il campo elettrico $\overrightarrow{E_1} = 3\overrightarrow{a_x}$ relativo alla regione di spazio 1 (x > 0, y > 0) in figura ed il campo magnetico $\overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{a_y}$ relativo alla regione 2 (x > 0, y < 0), calcolare la densità di carica superficiale ρ_s all'interfaccia tra dielettrico 1 e conduttore perfetto, la corrente superficiale $\overrightarrow{J_s}$ all'interfaccia tra dielettrico 2 e conduttore perfetto e i campi $\overrightarrow{E_2}$ ed $\overrightarrow{H_1}$.



Si conservano la componente tangenziale del campo elettrico e quella normale dell'induzione elettrica:

$$\overrightarrow{E_{t1}} = \overrightarrow{E_{t2}} \Rightarrow \overrightarrow{E_{x1}} = \overrightarrow{E_{x2}} \Rightarrow \overrightarrow{E_{x2}} = 3\overrightarrow{a_x}$$

$$\overrightarrow{D_{n1}} = \overrightarrow{D_{n2}} \Rightarrow \varepsilon_1 \overrightarrow{E_{y1}} = \varepsilon_2 \overrightarrow{E_{y2}} \Rightarrow \overrightarrow{E_{y2}} = 0$$

Per cui otteniamo: $\overrightarrow{E_2} = 3\overrightarrow{a_x} = \overrightarrow{E_1}$ [V/m]

Analogamente si conservano la componente tangenziale del campo magnetico e quella normale dell'induzione magnetica:

$$\overrightarrow{H_{t1}} = \overrightarrow{H_{t2}} \Rightarrow \overrightarrow{H_{x1}} = \overrightarrow{H_{x2}} \Rightarrow \overrightarrow{H_{x1}} = 0$$

$$\overrightarrow{B_{n1}} = \overrightarrow{B_{n2}} \Rightarrow \mu_1 \overrightarrow{H_{y1}} = \mu_2 \overrightarrow{H_{y2}} \Rightarrow \overrightarrow{H_{y1}} = 4\overrightarrow{a_y}$$

Per cui otteniamo: $\overrightarrow{H_1} = 4\overrightarrow{a_y}$ [A/m]

Si ha poi all'interfaccia tra la zona 1 e il conduttore:

$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s$$

Ed essendo i campi nulli all'interno di un conduttore perfetto:

$$\rho_s = D_{n2} = \varepsilon_1 E_{x1} = 53{,}1 \cdot 10^{-12} \qquad [\mathrm{C/m^2}]$$

All'interfaccia tra la zona 2 e il conduttore:

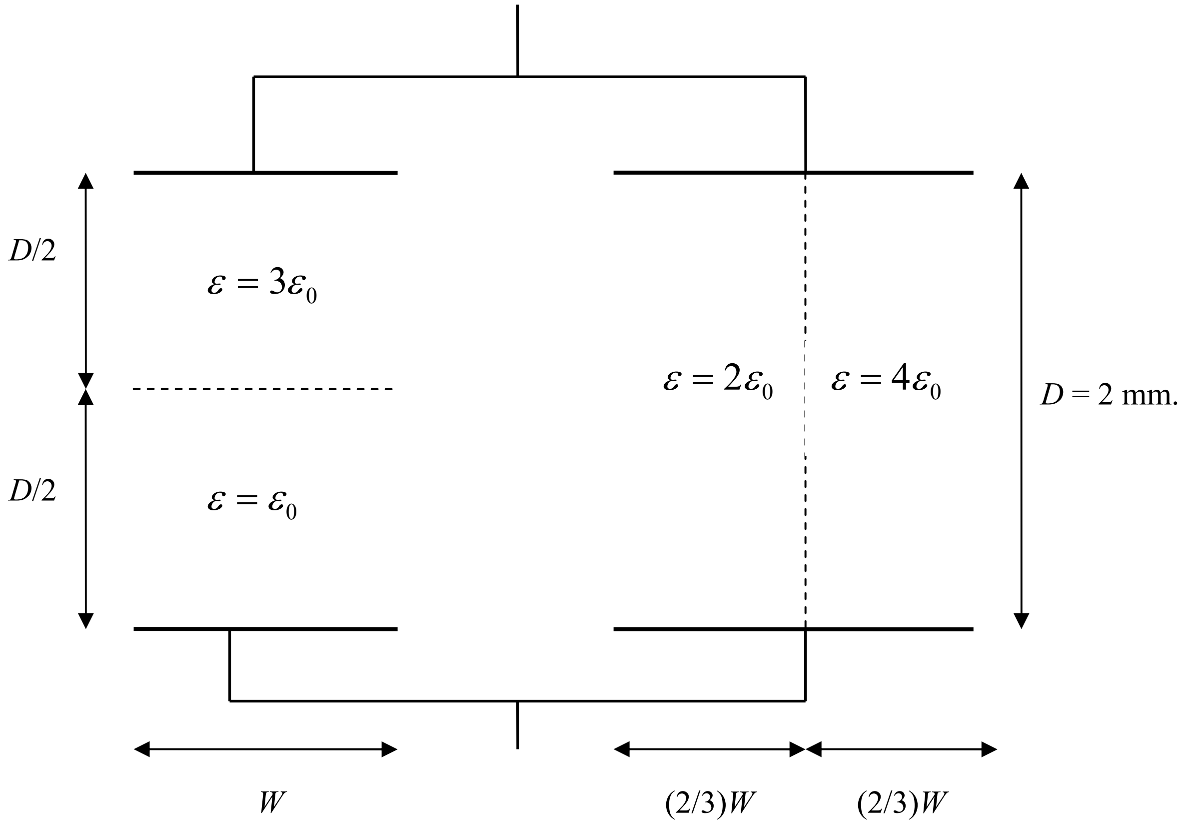
$$\overrightarrow{a_n} \times (\overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H_1}) = \overrightarrow{J_s}$$

Ed essendo i campi nulli all'interno di un conduttore perfetto:

$$\overrightarrow{a_x} \times \overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{J_s} = \overrightarrow{a_z} \qquad [\mathrm{A/m}]$$

ESERCIZIO 9

Calcolare la capacità della struttura in figura (W = 6 mm).



La struttura è equivalente al parallelo di due capacità, C_1 (a sinistra in figura) e C_2 (a destra in figura), le quali sono rispettivamente uguali alla serie e al parallelo di due ulteriori capacità.
Si ottiene:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{\frac{3\varepsilon_0 w}{D/2}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 w}{D/2}} = \frac{2D}{3\varepsilon_0 w} \Rightarrow C_1 = \frac{159{,}3 \cdot 10^{-15}}{4 \cdot 10^{-3}} = 39{,}8 \cdot 10^{-12} \qquad \text{[F/m]}$$

$$C_2 = \frac{2\varepsilon_0 (2/3) w}{D} + \frac{4\varepsilon_0 (2/3) w}{D} = \frac{6\varepsilon_0 (2/3) w}{D} = \frac{212{,}4 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 10_{-3}} = 106{,}2 \cdot 10^{-12} \qquad \text{[F/m]}$$

Si ottiene quindi:

$$C_{tot} = C_1 + C_2 = 146 \cdot 10^{-12} \ \text{[F/m]} \ = 146 \ \text{[pF/m]}$$