

La carta di Smith¹

Nel paragrafo precedente si è mostrata la legge di trasformazione delle impedenze per il regime sinusoidale stazionario che consente di determinare l'impedenza di ingresso in una qualsiasi sezione di una linea una volta noto il carico su cui questa è chiusa. Tale legge però, oltre a comportare operazioni non immediate con numeri complessi, non è di facile memorizzazione. Per calcolare le grandezze delle linee di trasmissione in modo più semplice è stata introdotta la carta di Smith che rappresenta in modo grafico la legge di trasformazione delle impedenze consentendo di evitare il ricorso a formule matematiche.

Si ricordi la relazione biunivoca che esiste fra i due numeri complessi che rappresentano l'impedenza di ingresso e il coefficiente di riflessione in tensione:

$$Z_{in}(z) = Z_c \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (5.1)$$

Se si esprime l'impedenza di ingresso normalizzata all'impedenza caratteristica della linea si ottiene

$$z_{in}(z) = \frac{Z_{in}(z)}{Z_c} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (5.2)$$

Mettendo in evidenza le parti reali ed immaginarie di $z_{in}(z) = r + jx$ e $\Gamma(z) = p + jq$ (r, x, p e q sono funzioni di z), si ha

$$r + jx = \frac{1 + p + jq}{1 - p - jq} \quad (5.3)$$

e quindi, uguagliando fra loro parti reali e immaginarie:

$$\left(p - \frac{r}{r+1}\right)^2 + q^2 = \frac{1}{(r+1)^2} \quad (5.4)$$

$$(p-1)^2 + \left(q - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (5.5)$$

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (p, q) l'equazione (5.4) rappresenta una circonferenza di raggio $1/(r+1)$ e centrata nel punto $(r/(r+1), 0)$ (vedi figura 5.1), mentre l'equazione (5.5) rappresenta una circonferenza di raggio $1/x$ e centrata nel punto $(1, 1/x)$ (vedi figura 5.2).

¹ Riva C., G.G. Gentili, "Appunti di Campi Elettromagnetici", Libreria CLUP, ISBN 88-7090-613-2, 2003.

Quindi, in un piano (piano Γ) in cui si rappresenti, su due assi ortogonali, la parte reale, p , e la parte immaginaria, q , del coefficiente di riflessione, il luogo geometrico dei punti con parte reale costante e quello con parte immaginaria costante, dell'impedenza d'ingresso normalizzata, sono le circonferenze appena descritte.

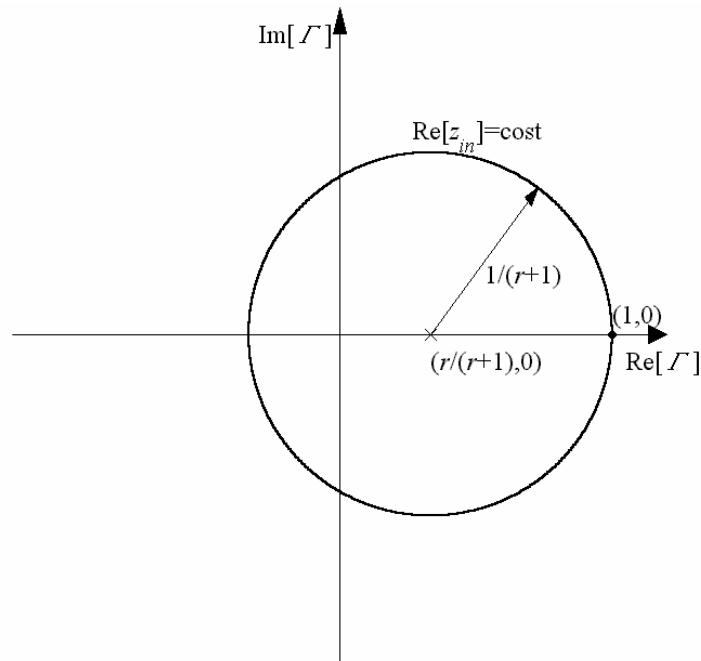


Figura 5.1 Luogo dei punti con parte reale dell'impedenza normalizzata costante nel piano Γ complesso.

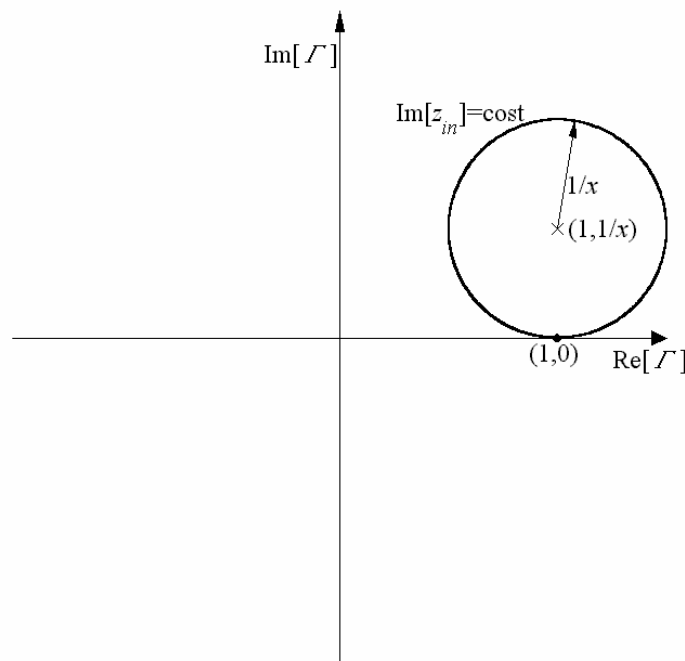


Figura 5.2 Luogo dei punti con parte immaginaria dell'impedenza normalizzata costante (caso $x > 0$) nel piano Γ complesso.

In figura 5.3 si può notare come le circonferenze con parte reale costante (r costante)

dell'impedenza normalizzata (z_{in}) siano in ogni punto perpendicolari a quelle con parte immaginaria costante (x costante). Poiché tale proprietà vale anche nel piano delle impedenze normalizzate (piano z_{in}), le equazioni (5.4) e (5.5) si dice che operano una trasformazione conforme dal piano z al piano Γ .

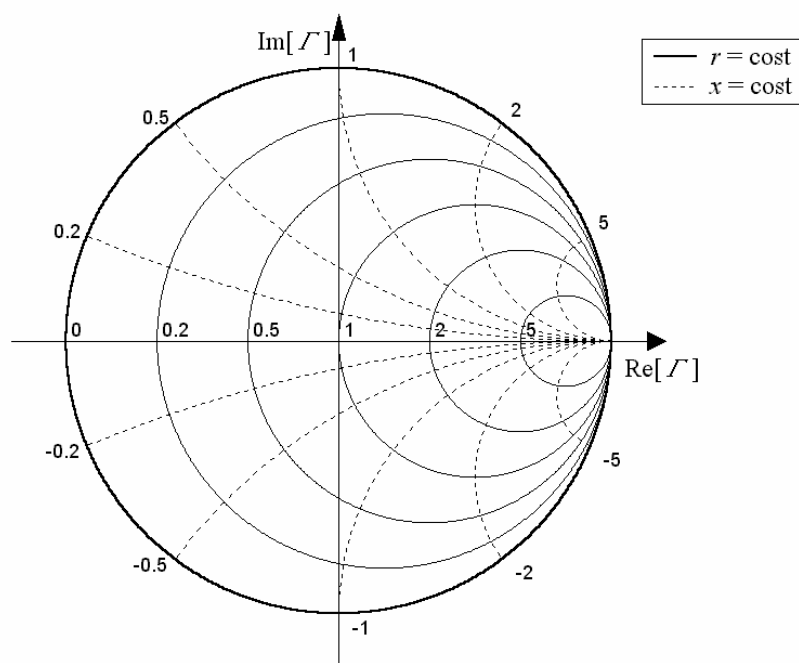


Figura 5.3 Luogo dei punti con parte reale ed immaginaria dell'impedenza normalizzata costante nel piano Γ complesso.

Le circonferenze a r costante sono tutte tangenti all'asse verticale nel punto (1,0). La circonferenza che passa per l'origine del piano Γ è quella con $r=1$.

Le circonferenze a x costante sono tutte tangenti all'asse orizzontale nel punto (1,0). Stanno nel semipiano $q=\text{Im}[\Gamma]>0$ se $x>0$, e nel semipiano $q=\text{Im}[\Gamma]<0$ se $x<0$.

Si osservi che il semipiano parte reale positiva dell'impedenza normalizzata nel piano complesso z_{in} si trasforma, nel piano Γ , nel cerchio centrato nell'origine $|\Gamma|\leq 1$ (delimitato dalla circonferenza con linea più spessa della figura 5.3): un'impedenza con parte reale positiva, infatti, dà sempre luogo ad un coefficiente di riflessione con modulo inferiore o uguale ad uno. La parte esterna al cerchio unitario rappresenta, quindi, le impedenze normalizzate con parte reale negativa. L'asse immaginario del piano z_{in} ($r=0$) si trasforma nella circonferenza $|\Gamma|=1$. Il punto (-1,0) sul piano Γ rappresenta il cortocircuito ($z_{in}=0$) mentre il punto (1,0) rappresenta il circuito aperto ($z_{in}=\infty$). L'origine del piano Γ rappresenta l'impedenza normalizzata unitaria, $z_{in}=1$, cioè la condizione di adattamento ($Z_{in}=Z_C$).

La carta di Smith rappresenta graficamente il cerchio unitario centrato nell'origine del

piano Γ e riporta le circonferenze a parte reale e immaginaria costante dell'impedenza normalizzata della linea di equazioni (5.4) e (5.5). Il diagramma evidenzia anche diverse scale graduate utili a misurare quantitativamente la posizione dei punti nel cerchio. E' evidente che una volta nota l'impedenza normalizzata risulta immediato ricavare dalla carta di Smith il coefficiente di riflessione e, viceversa, noto il coefficiente di riflessione si determina con facilità l'impedenza normalizzata (vedi figura 5.4). Questo, come detto, aiuta a risolvere con semplici calcoli l'equazione (5.53).

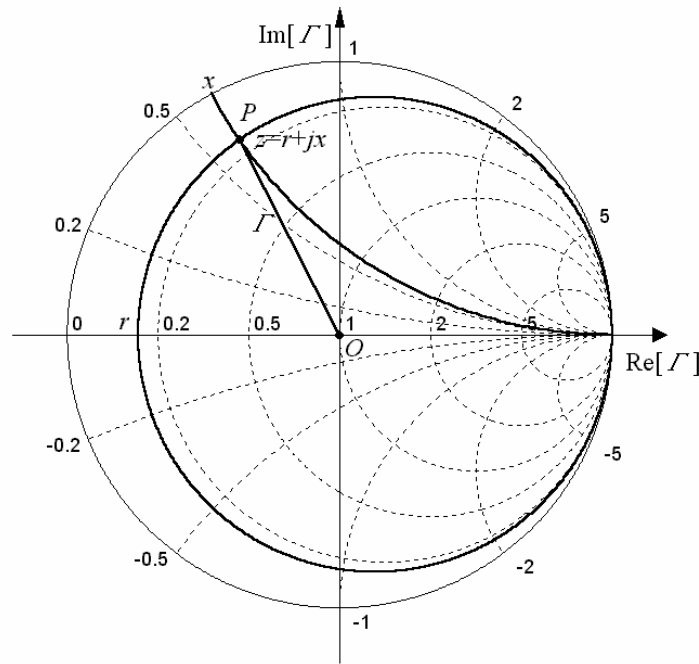


Figura 5.4 Corrispondenza fra impedenza normalizzata z e coefficiente di riflessione Γ sulla carta di Smith.

Si supponga allora di partire dalla sezione del carico e di volersi muovere lungo la linea verso il generatore. Note l'impedenza del carico, Z_L , e l'impedenza caratteristica delle linea, Z_C , è possibile calcolare l'impedenza normalizzata del carico z_L

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_C} = r_L + jx_L \quad (5.6)$$

e quindi il coefficiente di riflessione in tensione alla sezione del carico Γ_L

$$\Gamma_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \quad (5.7)$$

Si noti che il coefficiente di riflessione (vedi figura 5. 5) può essere anche calcolato sulla carta di Smith dopo essersi posizionati nel punto P_L di intersezione fra la

circonferenza parte reale dell'impedenza normalizzata uguale a r_L e la circonferenza parte immaginaria dell'impedenza normalizzata uguale a x_L . La distanza di P_L dall'origine, O , del piano Γ rappresenta il modulo di Γ_L mentre l'angolo formato fra OP_L e l'asse orizzontale ne rappresenta la fase. Le coordinate (p, q) staccate sull'asse orizzontale e verticale rappresentano ovviamente la parte reale e immaginaria di Γ_L . Per facilitare il calcolo del modulo del coefficiente di riflessione sul fondo della carta di Smith è riportata una scala tarata in $|\Gamma|$ (e una in $|\Gamma|^2$, per il coefficiente di riflessione in potenza); è sufficiente riportare su tale scala, con un compasso, la distanza fra l'origine e il punto di interesse sulla carta di Smith per leggere il valore di $|\Gamma|$. Sulla carta di Smith, intorno al cerchio unitario, c'è anche una scala tarata in gradi per determinare facilmente la fase di Γ , una volta prolungato il segmento OP_L fino ad intersecarla.

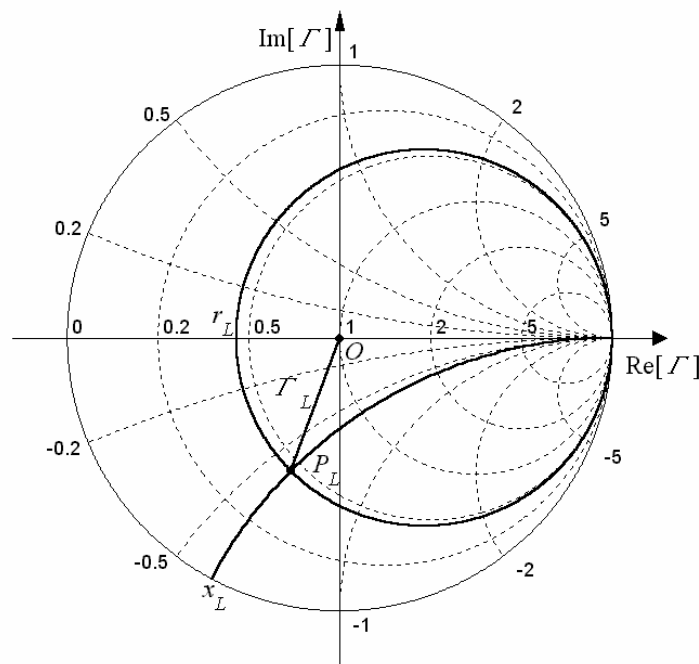


Figura 5.5 Calcolo del coefficiente di trasmissione sulla carta di Smith.

Si ricordi infine che il coefficiente di trasmissione in corrispondenza del carico, $T_L = 1 + \Gamma_L$, si trova sommando i due fasori 1 (fasore reale) e Γ_L (fasore complesso), come mostrato in figura 5.5. Si noti che il punto P_L può essere raggiunto sulla carta di Smith a partire dal punto C di coordinate $(-1, 0)$ sommando prima il fasore reale 1 e poi il fasore Γ_L . Quindi il segmento CP_L rappresenta T_L . Riportando con il compasso la distanza CP_L sulla scala tarata in T (in basso sulla carta di Smith) si può determinare facilmente $|T_L|$. Prolungando invece il segmento CP_L si può leggere sulla scala interna il valore della fase di T_L .

Se ci si muove dal carico verso il generatore di un tratto d , il nuovo coefficiente di riflessione è dato da

$$\Gamma(d) = \Gamma_L \exp(-j2\beta d) \quad (5.8)$$

Si osservi che, muovendosi su una linea priva di perdite, Γ non cambia in modulo ma solo in fase di un angolo pari a θ , funzione di d/λ come:

$$\theta(d/\lambda) = -2\beta d = -4\pi \frac{d}{\lambda} \quad [\text{rad}] \quad (5.9)$$

Sulla carta di Smith, quindi, a partire dal punto P_L ci si muoverà su una circonferenza centrata nell'origine e con raggio $|\Gamma|$ in senso orario (angolo negativo) di un angolo in radianti pari a $4\pi d/\lambda$ fino al punto P_d (vedi figura 5.6). Ovviamente se lo spostamento di un tratto d avviene da una generica sezione z verso il carico, ci si dovrà muovere in senso antiorario di un angolo $4\pi d/\lambda$. Per facilitare gli spostamenti, essendo l'angolo proporzionale alla distanza normalizzata alla lunghezza d'onda, sull'esterno del cerchio unitario è riportata una scala tarata in d/λ .

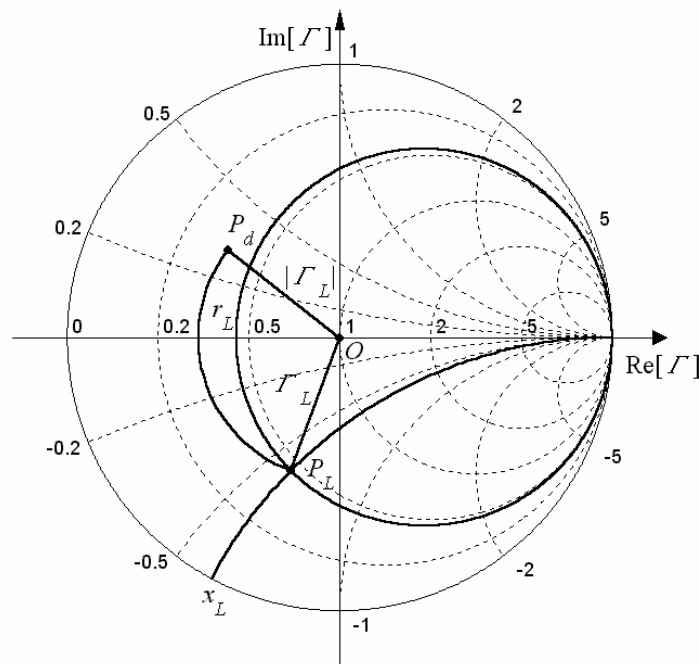


Figura 5.6 Movimento, a $|\Gamma|$ costante sulla carta di Smith, corrispondente ad un tratto di linea di generica lunghezza d .

Si noti che una rotazione di fase di un angolo giro si ottiene a una distanza $d = \lambda/2$; in tal caso l'impedenza e il coefficiente di riflessioni sono uguali a quelle del punto di partenza (nel caso preso ad esempio, è la sezione del carico, corrispondente al punto PL).

Dopo un tratto $d = \lambda/4$ ci si trova invece nel punto simmetrico rispetto all'origine del punto di partenza (vedi figura 5.7). In tal caso cambia il segno di Γ e quindi si ottiene

$$z_{in}(d = \lambda/4) = \frac{1 + \Gamma(d = \lambda/4)}{1 - \Gamma(d = \lambda/4)} = \frac{1 - \Gamma(d = 0)}{1 + \Gamma(d = 0)} = \frac{1}{z_{in}(d = 0)} \quad (5.10)$$

Se ci si sposta quindi di un tratto $d = \lambda/4$ su una linea, il coefficiente di riflessione cambia segno e l'impedenza normalizzata si inverte; quindi l'impedenza non normalizzata diviene

$$Z_{in}(d = \lambda/4) = Z_c \frac{1}{z_{in}(d = 0)} = \frac{Z_c^2}{Z_{in}(d = 0)} \quad (5.11)$$

Ovviamente quanto commentato a partire dalla sezione del carico vale anche a partire da una qualsiasi sezione z della linea.

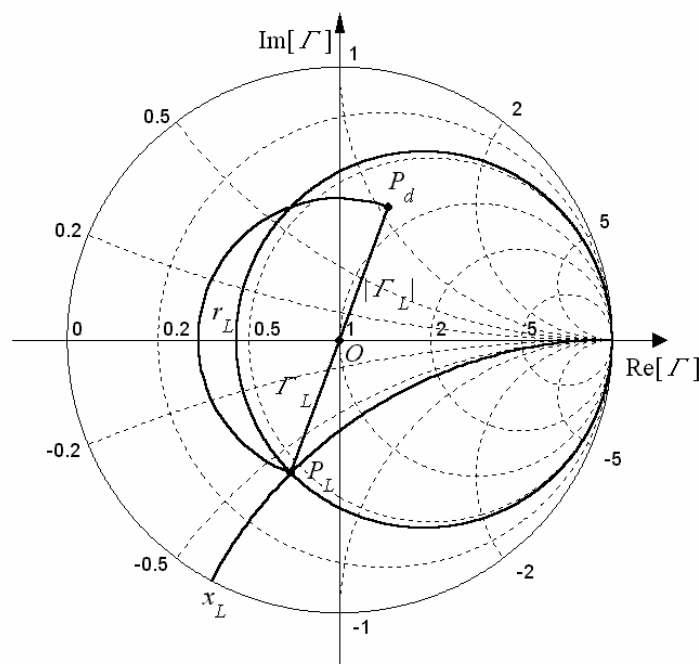


Figura 5.7 Movimento, a $|\Gamma|$ costante sulla carta di Smith, corrispondente ad un tratto di linea di lunghezza $d = \lambda/4$.

Se una linea è terminata con un cortocircuito o con un circuito aperto, muovendosi sulla linea si rimane sempre sulla circonferenza $|\Gamma| = 1$ della carta di Smith. Se ad un certo punto della linea viene inserito in serie un elemento concentrato puramente resistivo, cambierà solo la parte reale di z_{in} e quindi ci si muoverà su una circonferenza a x costante. Viceversa se viene inserito in serie un elemento puramente reattivo cambierà solo la parte immaginaria di z_{in} e quindi ci si muoverà su una

circonferenza a r costante.

Anche se fino ad ora si è parlato solo di impedenze, si osservi che la carta di Smith può essere anche utilizzata anche per collegare l'ammettenza interna di una linea con il coefficiente di riflessione in corrente, Γ_I ; in tal caso si parla di carta di Smith delle ammettenze. Le relazioni che legano z_{in} e Γ sono infatti analoghe a quelle che legano l'ammettenza normalizzata, y_{in} , a Γ_I

$$\Gamma_I = \frac{y_{in} - 1}{y_{in} + 1} \quad y_{in} = \frac{1 + \Gamma_I}{1 - \Gamma_I} \quad (5.12)$$

con

$$y_{in} = \frac{Y_{in}(z)}{Y_C} \quad (5.13)$$

dove $Y_{in}(z) = I(z)/V(z) = 1/Z_{in}(z)$ è l'ammettenza di ingresso della linea e $Y_C = 1/Z_C$ è l'ammettenza caratteristica della linea.

Poiché $\Gamma_I = -\Gamma$ si può calcolare y_{in} a partire dal punto sulla carta di Smith che identifica z_{in} determinando il punto simmetrico rispetto all'origine che, come già osservato, corrisponde a $z'_{in} = 1/z_{in}$. Infatti

$$y_{in} = \frac{Y_{in}(z)}{Y_C} = \frac{Z_C}{Z_{in}(z)} = \frac{1}{z_{in}} \quad (5.14)$$

Dal momento che Γ_I ha la stessa legge di variazione di Γ sulla linea, si possono utilizzare le tecniche già illustrate per muoversi sulla carta di Smith. In ogni sezione della linea, costruendo il punto simmetrico rispetto all'origine, si passa alla carta delle impedenze e si può determinare Γ .