

**Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva**  
**Appello del 9 febbraio 2009**

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

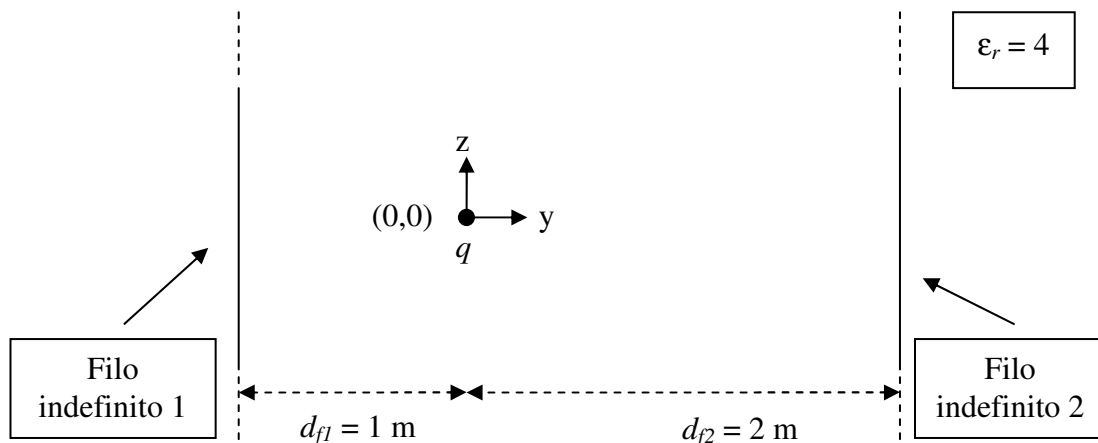
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA \_\_\_\_\_

FIRMA \_\_\_\_\_

**Esercizio 1**



In un mezzo dielettrico con costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1} = 4$  si trovano, secondo la geometria in figura:

- 2 fili indefiniti in direzione  $z$  su cui è depositata una densità di carica lineare uniforme, rispettivamente  $\sigma_{l1} = 10^{-9}$  C/m (filo 1) e  $\sigma_{l2} = -10^{-9}$  C/m (filo 2);
- una carica  $q = 10^{-12}$  C nell'origine degli assi.

Calcolare la posizione in cui porre una carica  $Q = 10^{-9}$  C in modo che la carica  $q$  rimanga in equilibrio.

**Soluzione:**

Il campo dovuto al filo indefinito 1 vale:

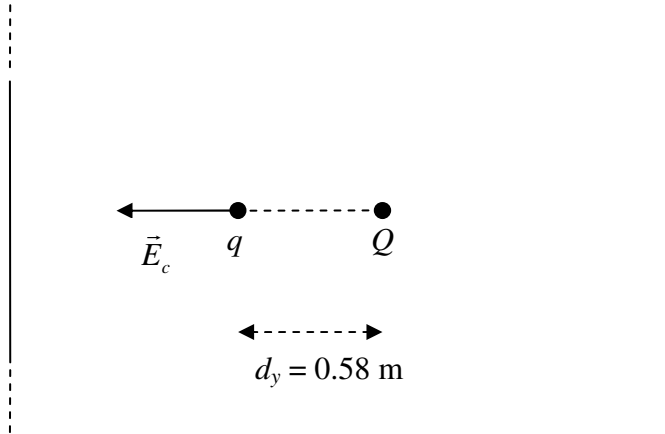
$$\vec{E}_{f1} = \frac{\sigma_{l1}}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 d_{f1}} \vec{u}_y = 4.5 \text{ V/m}$$

Il campo dovuto al filo indefinito 2 vale:

$$\vec{E}_{f2} = \frac{\sigma_{l2}}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 d_{f2}} \vec{u}_y = 2.25 \text{ V/m}$$

Perché  $q$  sia in equilibrio, il campo generato dalla carica  $Q$ ,  $\vec{E}_c$ , deve essere uguale in modulo e contrario in verso a quello generato dai due fili. La carica  $Q$  sarà quindi posta sull'asse  $y$  ( $z = 0$ ), in posizione  $d_y$ , a destra della carica  $q$ . Deve essere quindi:

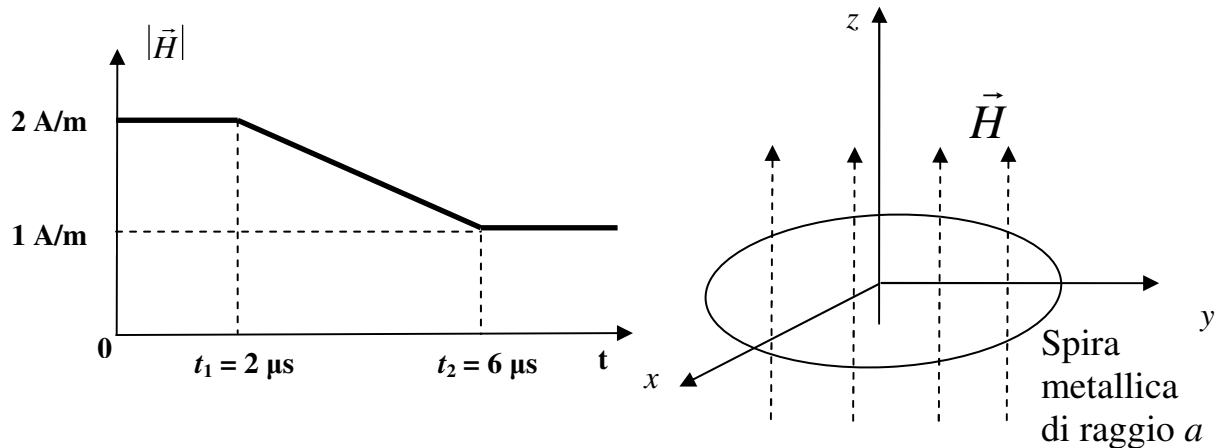
$$|\vec{E}_c| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 d_y^2} = |\vec{E}_{f1} + \vec{E}_{f2}| \Rightarrow d_y = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 |\vec{E}_{f1} + \vec{E}_{f2}|}} = 0.58 \text{ m}$$



## Esercizio 2

Una spira metallica circolare di raggio  $a = 1 \text{ m}$  è immersa in un campo magnetico uniforme nello spazio in modo che la normale alla superficie della spira sia parallela alle linee di flusso del vettore  $\vec{H}$  (parte destra in figura), il cui modulo varia nel tempo secondo la seguente legge (parte sinistra della figura):

$$|\vec{H}| = \begin{cases} 2 \text{ A/m} & 0 \leq t < 2 \mu\text{s} \\ 2,5 - 0,25t \text{ A/m} & 2 \mu\text{s} \leq t < 6 \mu\text{s} \\ 1 \text{ A/m} & t \geq 6 \mu\text{s} \end{cases}$$



Per  $t \geq 0$ :

- 1) calcolare il flusso magnetico attraverso la spira;
- 2) calcolare il modulo della forza elettromotrice (f.e.m.) indotta sulla spira;
- 3) calcolare l'intensità della corrente indotta nella spira se ad essa è associata una resistenza  $R = 50 \Omega$ ;
- 4) calcolare l'intensità della corrente indotta nella spira per  $t \geq 6 \mu\text{s}$  se la spira ruota rispetto all'asse  $z$ .

### Soluzione:

1) Il flusso magnetico attraverso la spira, dove il campo magnetico e la normale alla spira sono tra loro paralleli, vale ( $S$  indica la superficie della spira):

$$\phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 |\vec{H}| \int_S dS = \mu_0 |\vec{H}| a^2 \pi = \begin{cases} 7,9 \times 10^{-6} \text{ Wb} & 0 \leq t < 2 \mu\text{s} \\ 9,9 \times 10^{-6} - 9,9 \times 10^{-7} t \text{ Wb} & 2 \mu\text{s} \leq t < 6 \mu\text{s} \\ 7,9 \times 10^{-6} \text{ Wb} & t \geq 6 \mu\text{s} \end{cases}$$

2) Il modulo della tensione indotta sulla spira vale:

$$|V| = \left| -\frac{\partial \phi(\vec{B})}{\partial t} \right| = \frac{\partial (\mu_0 |\vec{H}| a^2 \pi)}{\partial t} = \mu_0 a^2 \pi \frac{\partial |\vec{H}|}{\partial t} = \begin{cases} 0 \text{ V} & 0 \leq t < 2 \mu\text{s} \\ 9,9 \times 10^{-7} \text{ V} & 2 \mu\text{s} \leq t < 6 \mu\text{s} \\ 0 \text{ V} & t \geq 6 \mu\text{s} \end{cases}$$

3) L'intensità della corrente indotta nella spira, per la legge di Ohm, vale:

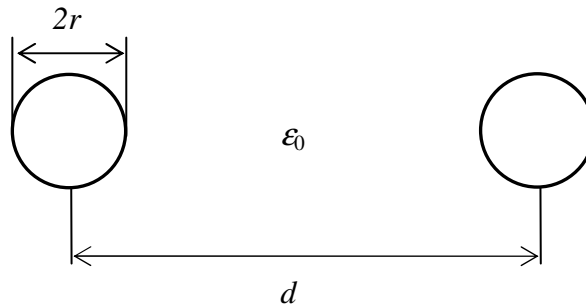
$$I = \frac{V}{R} = \begin{cases} 0 \text{ A} & 0 \leq t < 2 \mu\text{s} \\ 2 \times 10^{-8} \text{ A} & 2 \mu\text{s} \leq t < 6 \mu\text{s} \\ 0 \text{ A} & t \geq 6 \mu\text{s} \end{cases}$$

4) Dato che la rotazione della spira intorno all'asse  $z$  non genera variazione di flusso magnetico nel tempo, la corrente indotta nella spira per  $t \geq 6 \mu\text{s}$  è nulla.

### Esercizio 3

Calcolare il raggio,  $r$ , dei conduttori, assunti uguali, della linea in aria di figura in modo che l'impedenza caratteristica  $Z_c$  sia pari a  $300 \, \Omega$ , sapendo che  $d=3 \, \text{cm}$ . Calcolare, per tale linea, la costante di attenuazione in dB/km alla frequenza di  $100 \, \text{MHz}$  (conduttanza dei conduttori  $\sigma = 5 \cdot 10^7 \, \text{S/m}$ ).

*Suggerimento: si utilizzi l'approssimazione dei conduttori sottili.*



#### Soluzione:

Calcolo di  $r$ :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\ln(d/r)}{\pi} = 300 \, \Omega$$

$$d/r = \exp\left(\frac{300\pi}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}\right) = 12.18$$

$$r = d/12.18 = 0.25 \, \text{cm}$$

Calcolo della costante di attenuazione:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 7.12 \, \mu\text{m}$$

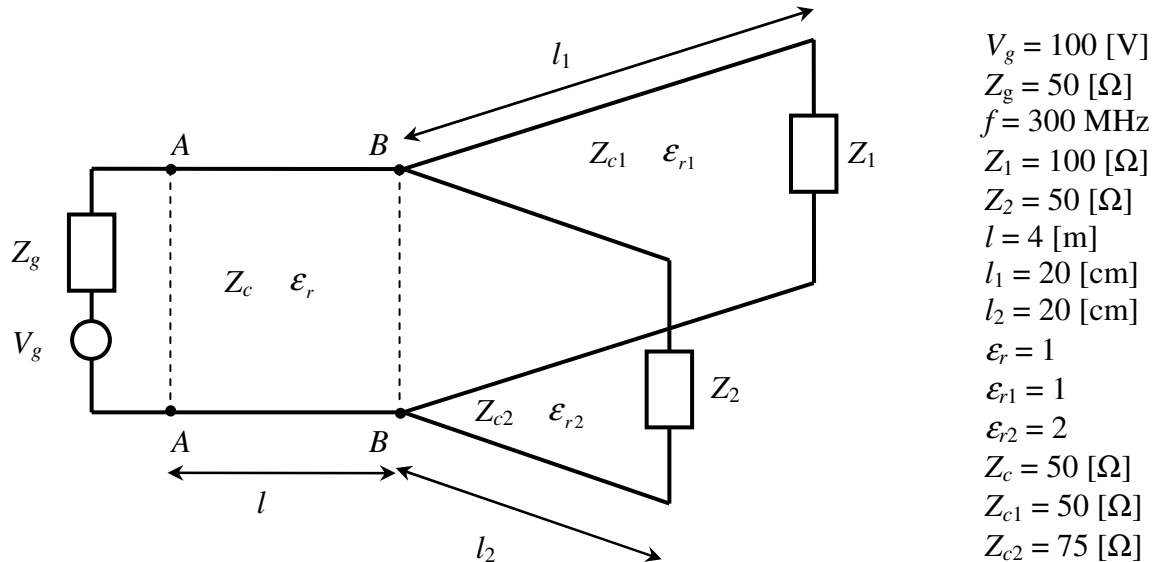
$$R = \frac{2}{2\pi r\sigma\delta} = 0.36$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_c} = 6.05 \times 10^{-4} \, \text{Np/m} = 5.2 \, \text{dB/km}$$

#### Esercizio 4

Data la linea di trasmissione in figura operante alla frequenza di 300 MHz, calcolare:

- la potenza erogata dal generatore ai 2 carichi separatamente;
- il modulo della tensione a morsetti dei carichi  $Z_1$  e  $Z_2$ ;
- la tensione in modulo e fase sulla sezione  $BB$ .



#### Soluzione:

Le lunghezze d'onda nei tre tratti di linea con diverse caratteristiche valgono:

$$\lambda_0 = c/f = 1 \text{ m} \quad \lambda_1 = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{r1}} = 1 \text{ m} \quad \lambda_2 = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{r2}} = 0.707 \text{ m}$$

Dunque le lunghezze normalizzate delle linee valgono:

$$\bar{l} = l/\lambda = 4 \quad \bar{l}_1 = l_1/\lambda_1 = 0.2 \quad \bar{l}_2 = l_2/\lambda_2 = 0.283$$

Le impedenze normalizzate invece valgono:

$$\bar{Z}_1 = Z_1/Z_{c1} = 2 \quad \bar{Z}_2 = Z_2/Z_{c2} = 0.667$$

Utilizzando la carta di Smith, si riportano le impedenze normalizzate alla sezione BB:

$$\bar{Z}_{1BB} = 0.54 - j0.24 \Rightarrow Z_{1BB} = \bar{Z}_{1BB} Z_{c1} = 26.9 - j11.9 \text{ } \Omega$$

$$\bar{Z}_{2BB} = 1.43 - j0.24 \Rightarrow Z_{2BB} = \bar{Z}_{2BB} Z_{c2} = 106.9 - j17.9 \text{ } \Omega$$

Il carico totale alla sezione BB vale (parallelo):

$$Y_{BB} = Y_{1BB} + Y_{2BB} = \frac{1}{Z_{1BB}} + \frac{1}{Z_{2BB}} = 0.04 + j0.015 \text{ S} \Rightarrow Z_{BB} = 1/Y_{BB} = 21.8 - j8.2 \text{ } \Omega$$

L'impedenza alla sezione AA coincide con quella alla sezione BB perché ci si muove sulla carta di Smith compiendo 8 giri completi ( $\bar{l} = 4$ ):  $Z_{AA} = Z_{BB} = 21.8 - j8.2 \text{ } \Omega$

Il coefficiente di riflessione alla sezione del generatore vale:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} = -0.38 - j0.16 \Rightarrow |\Gamma_g| = 0.41$$

La potenza che passa alla sezione AA e giunge quindi alla sezione BB, dove viene assorbita dai carichi, vale:

$$P_{AA} = P_{BB} = P_d (1 - |\Gamma_g|^2) = \frac{|V_g|^2}{8 \operatorname{Re}[Z_g]} (1 - |\Gamma_g|^2) = 20.8 \text{ W}$$

La potenza si ridistribuisce sui carichi proporzionalmente alla parte reale dell'ammittenza dei carichi stessi alla sezione BB:

$$P_1 = P_{BB} \frac{\operatorname{Re}[Y_{1BB}]}{\operatorname{Re}[Y_{1BB}] + \operatorname{Re}[Y_{2BB}]} = 16.1 \text{ W} \Rightarrow P_2 = P_{BB} - P_1 = 4.7 \text{ W}$$

Il modulo della tensione ai morsetti dei carichi vale:

$$|V_1| = \sqrt{\frac{2P_1}{\operatorname{Re}[Y_1]}} = 56.8 \text{ V} \quad |V_2| = \sqrt{\frac{2P_2}{\operatorname{Re}[Y_2]}} = 21.7 \text{ V}$$

Infine, per calcolare la tensione in modulo e fase alla sezione BB, bisogna conoscere l'onda progressiva nel primo tratto di linea. Essendoci adattamento tra il generatore e il primo tratto di linea, l'onda progressiva,  $V^+$ , a destra della sezione AA, vale:

$$V^+ = V_g / 2 = 50 \text{ V}$$

Tale onda si propaga fino alla sezione BB e viene riflessa generando un'onda regressiva che si somma a quella progressiva; la tensione alla sezione BB vale dunque:

$$V_{BB} = V^+ e^{-j\beta l} (1 + \Gamma_{BB}) = 31.2 - j7.9 \text{ V}$$

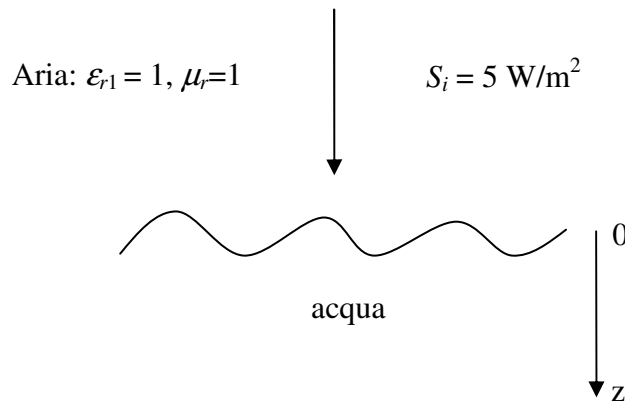
$$\text{dove } \Gamma_{BB} = \frac{Z_{BB} - Z_c}{Z_{BB} + Z_c} = \Gamma_{AA} = \Gamma_g = -0.38 - j0.16 \text{ e } \beta = 2\pi / \lambda_0 = 6.28 \text{ rad/m}$$

### Esercizio 5

Un'onda piana uniforme che si propaga in aria ( $\epsilon_r=1$ ,  $\mu_r=1$ ) alla frequenza di 5 MHz, incide su una superficie d'acqua. Sapendo che all'onda in aria è associata una densità di potenza  $S_i = 5 \text{ W/m}^2$ , calcolare la potenza trasportata dall'onda sotto il pelo dell'acqua ad una profondità  $z=0.5 \text{ m}$  (vedi figura) in caso di:

- acqua di mare ( $\epsilon_{r2} = 80$  e conducibilità  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ );
- acqua lacustre ( $\epsilon_{r2} = 81$  e conducibilità  $\sigma = 4 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$ ).

*Suggerimento: calcolare la tangente di perdita per valutare le approssimazioni possibili.*



### Soluzione:

Per l'acqua di mare:

$$\tan \phi = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_{r2}} \approx 180 \gg 1 \Rightarrow \text{buon conduttore}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = 0.1125 \text{ m} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\delta} = 8.89 \text{ Np/m}$$

$$Z = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = 2.22 + j2.22 \text{ } \Omega$$

$$\eta_0 \approx 377 \text{ } \Omega$$

$$\Gamma = \frac{Z - \eta_0}{Z + \eta_0} = -0.988 + j0.012$$

$$S_{i0} = S_i (1 - |\Gamma|^2) = 0.12 \text{ W/m}^2$$

$$S_i(z = 0.5) = S_{i0} \exp(-2\alpha z) = 1.6 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

Per l'acqua lacustre:

$$\tan \phi = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_{r2}} \approx 0.178 \ll 1 \Rightarrow \text{buon dielettrico}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \tan \phi = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r2}}}{2} \tan \phi = 0.0837 \text{ Np/m}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}} = 41.86 \text{ } \Omega$$

$$\eta_0 \approx 377 \text{ } \Omega$$

$$\Gamma = \frac{Z - \eta_0}{Z + \eta_0} = -0.8$$

$$S_{t0} = S_i (1 - |\Gamma|^2) = 1.8 \text{ W/m}^2$$

$$S_t(z = 0.5) = S_{t0} \exp(-2\alpha z) = 1.65 \text{ W/m}^2$$