Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni, G. Gentili e C. Riva
Appello del 13 febbraio 2006

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ____________________

MATRICOLA ____________________

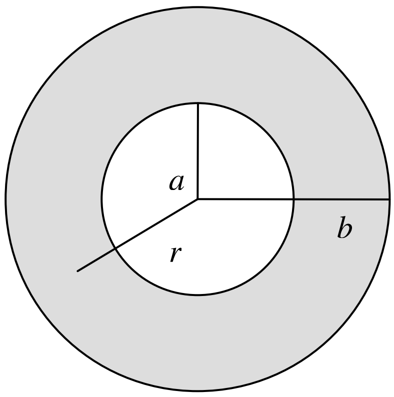
FIRMA ____________________

Esercizio 1

Data la sfera conduttrice posta nel vuoto in figura, cava per $r < a$ (r distanza dal centro della sfera), con distribuzione di carica volumetrica uniforme ρ_V per $a \le r \le b$, si calcoli:

a. il campo elettrico in tutto lo spazio

b. il valore della carica puntiforme Q da porre nel centro della sfera perché il campo elettrico per $r \ge b$ sia nullo.



$a = 3$ cm
$b = 7$ cm
$\rho_V = 10^{-6}\ \ \mathrm{C/m^3}$

Soluzione:

Si applica il teorema di Gauss su superfici sferiche di raggio r, cioè $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = \int_V \rho_V \, dV$.

Per $0 \le r < a$: campo nullo perché la superficie sferica considerata non racchiude nessuna carica.
Per $a \le r \le b$:

$$D_r 4\pi r^2 = \rho_V \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 \right) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0 r^2}\left(r^3 - a^3\right)\vec{a}_r$$

Per $r \ge b$:

$$D_r 4\pi r^2 = \rho_V \left(\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 \right) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0 r^2}\left(b^3 - a^3\right)\vec{a}_r$$

Per trovare la carica Q che annulla il campo all'esterno della sfera, applicando la sovrapposizione degli effetti, basta imporre:

$$\overrightarrow{E}_1(r)+\overrightarrow{E}_2(r)=0$$

Questa condizione si traduce nella seguente:

$$\vec{E}_{r2}=-\vec{E}_{r1}\Rightarrow\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=-\frac{\rho_V}{3\varepsilon_0 r^2}\left(b^3-a^3\right)\Rightarrow Q=-\rho_V\frac{4}{3}\pi\left(b^3-a^3\right)\ [\mathrm{C}]$$

Come era intuibile, la carica Q risulta essere uguale (ma di segno opposto) alla totale carica contenuta nella sfera.

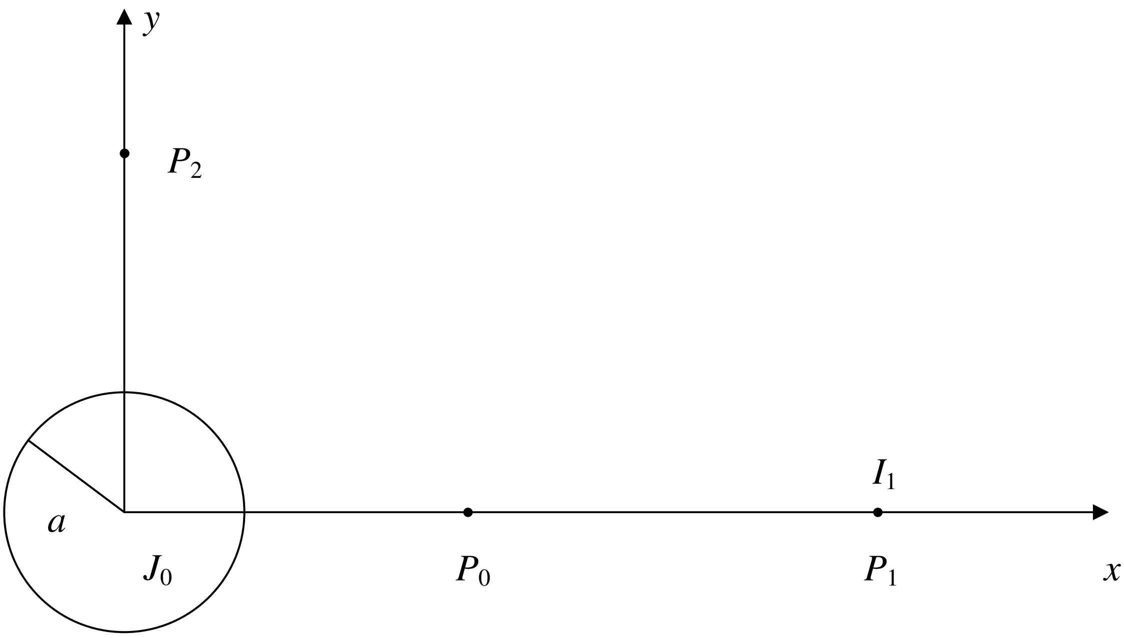
Esercizio 2

Un cilindro conduttore (asse coincidente con l'asse z, raggio $a = 2$ cm) è percorso da una densità volumetrica di corrente uniforme pari a $\vec{J}_0 = 3.98\,\vec{a}_z$ [A/m^2]. Un filo percorso da corrente costante pari a $\vec{I}_1 = 3\,\vec{a}_z$ [mA] è posto nel punto P_1 di coordinate $x_1 = 15$ cm, y_1=0.

Determinare:

a. L'ascissa del punto $P_0(x_0,0)$ in cui il campo magnetico è nullo;

b. Il campo magnetico nel punto $P_2(0, y_2 = 5cm)$ se $I_1 = 0$ e la densità di corrente all'interno del cilindro non è più uniforme ma vale $J_0 = (3/r)\cdot\overrightarrow{a_z}$ [A/m^2], dove $r \leq a$ è la distanza dal centro del cilindro (origine degli assi).



Soluzione:

a. La corrente totale che fluisce nel cilindro è pari a:

$$\vec{I}_c = \vec{J}_0\,\pi\,a^2 = 5\,\vec{a}_z \quad \text{[mA]}$$

Il campo magnetico generato dal cilindro in P_0 vale:

$$\vec{H}_c = \frac{I_c}{2\pi\,x_0}\vec{a}_y$$

mentre quello generato dalla corrente I_1 sempre in P_0 vale:

$$\vec{H}_1 = -\frac{I_1}{2\cdot\pi\cdot(x_1 - x_0)}\vec{a}_y$$

La direzione del campo magnetico si trova in entrambi i casi con la regola della mano destra.
I due campi magnetici hanno la stessa direzione e verso opposto; affinché il campo magnetico totale sia nullo si deve dunque avere:

$$\left|\vec{H}_c\right| = \left|\vec{H}_1\right| \Rightarrow \frac{I_c}{2\,\pi\,x_0} = \frac{I_1}{2\,\pi\,(x_1 - x_0)}$$

Risolvendo si ottiene $x_0 = 9.4$ cm.

b. In questo caso la corrente totale che fluisce nel cilindro vale:

$$I_c = \int_0^a \vec{J}_0 \cdot \overrightarrow{dS} = \int_0^a \frac{3}{r}\vec{a}_z \left(2\,\pi\, r\, dr\, \vec{a}_z\right) = \int_0^a 6\,\pi\, dr = 6\,\pi\, a \quad \text{[A]}$$

Il campo magnetico all'esterno del cilindro si ottiene tramite la legge di Ampere:

$$\oint \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = I_c \Rightarrow \vec{H} = 3\frac{a}{r}\vec{a}_\varphi$$

dove r è la distanza dal centro del cilindro.

Nel punto P_2 si ha quindi:

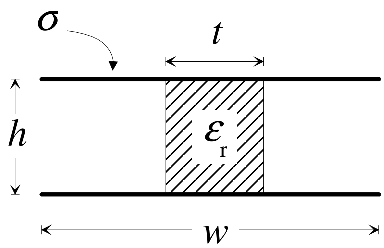
$$\vec{H}(P_2) = -3 \cdot \frac{a}{y_2}\vec{a}_x = -1.2\vec{a}_x \quad \text{[A/m]}$$

Esercizio 3

Si consideri la linea di trasmissione di cui in figura si mostra la sezione trasversa, costituita da due strisce metalliche sostenute da un dielettrico. Trascurando l'effetto di bordo e posti $h = 2$ mm, $\varepsilon_r = 4$ e $\mu_r = 1$:

a. si dimensioni la linea (t, w) in modo che abbia impedenza caratteristica di 75 Ω e velocità di propagazione di $2.5 \cdot 10^8$ m/s;

b. si calcoli l'attenuazione in dB/km alla frequenza di 2 GHz, sapendo che i conduttori hanno conducibilità $\sigma = 4 \cdot 10^7$ S/m.



Soluzione:

Solutz.

a) $C = \epsilon_0 \left(\epsilon_r \frac{t}{h} + \frac{w-t}{h} \right)$

$L = \mu_0 \frac{h}{w}$

$\Rightarrow \quad v = v_0 \sqrt{\frac{w}{(\epsilon_r - 1)t + w}} \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{t} = 6{,}8$

$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = 75\ \Omega \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}23$ mm

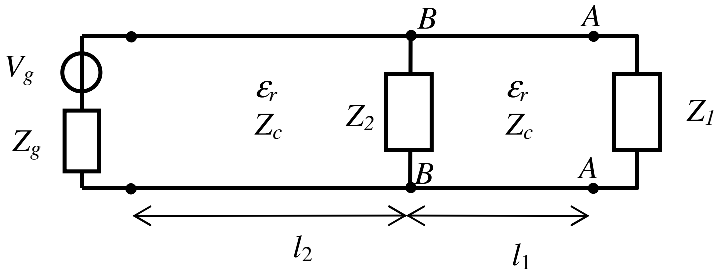
$w = 8{,}36$ mm

b) $\alpha = \frac{R}{2Z_c} \qquad R = R_s \frac{2}{w} \qquad R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = 0.014\ \Omega$

$\alpha_{dB/Km} = \frac{R}{2Z_c} \cdot 8686 \cong 195$

Esercizio 4

Data la linea di trasmissione in figura, calcolare la potenza assorbita dai carichi Z_1 e Z_2.



$f = 300$ MHz
$V_g = 120$ V
$Z_g = 75\ \Omega$
$Z_l = 75 + \mathrm{j}\,75\ \Omega$
$Z_2 = 75\ \Omega$
$Z_c = 75\ \Omega$
$\varepsilon_r = 4$
$l_1 = 1.5$ m
$l_2 = 30$ m

Soluzione:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{4}} = 0{,}5\,m \qquad \ell_1 = 3\lambda$$

$$Z_1 \longrightarrow Z_{1B} = Z_{1} \longrightarrow Y_{1B}$$

$$Y_B = Y_{1B} + Y_2 = \frac{1}{75}\left(1 + 0{,}5 - j0{,}5\right) \quad \Omega^{-1}$$

$$|\Gamma_B| = 0{,}28$$

$$P_d = \frac{120^2}{8 Z_g} = 24\,W$$

$$P_{diss\ totale} = P_d\left(1 - |\Gamma_B|^2\right) = 22.12\,W$$

$$P_{diss\,Z_1} + P_{diss\,Z_2} = P_{diss\ totale} = |V_B|^2 G_1 + |V_B|^2 G_2 \Rightarrow$$

$$P_{diss\,Z_1} = 2\,P_{diss\,Z_2} \qquad P_{diss\,Z_1} = 7.37\,W$$

$$P_{diss\,Z_2} = 14.75\,W$$

Esercizio 5

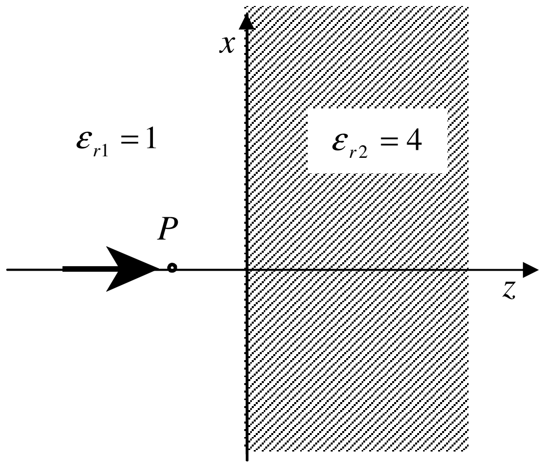
Sia data un'onda piana alla frequenza di 300 MHz incidente normalmente sulla superficie di separazione tra due mezzi, come in figura. Il valore del campo incidente in z = 0 è $\vec{E}_{inc}(0,0,0) = 10\,j\vec{a}_x$ [V/m].

a. indicare la polarizzazione del campo elettrico dell'onda incidente;

b. scrivere l'espressione del vettore fasore del campo incidente $\vec{H}_{inc}$ in (0, 0, 0);

c. scrivere le espressioni del vettore fasore del campo magnetico totale $\vec{H}_1$ nel punto *P di* coordinate x = 0, y = 0, z = -1 m;

d. calcolare la densità di potenza dell'onda che si propaga nel mezzo 2.



Soluzione:

a. Polarizzazione del campo elettrico: lineare in direzione *x*.

b. $\vec{H}_{inc}(0,0,0) = \dfrac{10j}{\eta_1}\vec{a}_y = \dfrac{10j}{120\pi}\vec{a}_y = 26.5j\,\vec{a}_y \quad [\text{mA/m}]$

c. Campo incidente:

$$\vec{H}_{inc}(x=0, y=0, z=-1) = \vec{H}_{inc}(0,0,0)\exp[-j\beta z] = 26.5j\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda}z\right]\vec{a}_y = 26.5j\,\vec{a}_y \quad [\text{mA/m}]$$

Campo riflesso:

$$\vec{H}_{rifl}(x=0, y=0, z=-1) = -\vec{H}_{inc}(0,0,0)\,\Gamma_0\exp[+j\beta z] = -26.5j\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\vec{a}_y = \frac{26.5}{3}j\,\vec{a}_y \quad [\text{mA/m}]$$

Campo totale:

$$\vec{H}_1(0,0,-1) = \vec{H}_{inc}(0,0,-1) + \vec{H}_{rifl}(0,0,-1) = 35.3j\,\vec{a}_y \quad [\text{mA/m}]$$

d. Coefficiente di riflessione: $\Gamma_0 = \dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} = -\dfrac{1}{3}$

Densità di potenza incidente: $S_{inc} = \dfrac{1}{2}\eta_1|H_{inc}|^2 = 0.132 \quad [\text{W/m}^2]$

Densità di potenza trasmessa: $S_2 = S_{inc}\left(1-|\Gamma_0|^2\right) = 0.118 \quad [\text{W/m}^2]$

Domande *(sono possibili risposte multiple; alle risposte errate è associato un punteggio negativo)*:

6) Per un'onda piana che si propaga un materiale buon conduttore:
   - ☑ i campi elettrico e magnetico decrescono esponenzialmente in direzione di propagazione
   - ☐ i campi elettrico e magnetico sono necessariamente nulli ovunque
   - ☐ il campo elettrico è necessariamente nullo ovunque
   - ☐ il campo elettrico è sempre in fase con il campo magnetico
   - ☐ il vettore di Poynting è necessariamente nullo ovunque

7) Dato un circuito costituito da un generatore, un tratto di linea ed un carico, se in una sezione distante λ dal carico si misura una tensione nulla in modulo, allora:
   - ☐ il generatore ha tensione a vuoto sicuramente nulla
   - ☐ il carico è sicuramente un circuito aperto
   - ☑ il carico è sicuramente un corto circuito
   - ☐ il carico è sicuramente immaginario
   - ☐ il carico è sicuramente adattato alla linea

8) Dato un circuito costituito da un generatore, un tratto di linea di trasmissione ed un carico, se la linea ha impedenza caratteristica puramente reale, allora:
   - ☐ è sicuramente una linea con perdite
   - ☐ è sicuramente collegata ad un carico puramente resistivo
   - ☑ è una linea senza perdite
   - ☐ il rapporto fra tensione e corrente totali sulla linea è sicuramente reale
   - ☐ il carico è sicuramente adattato alla linea

9) Il campo elettrico di un'onda piana uniforme che si propaga lungo l'asse z è pari a $\vec{E} = \vec{a}_x + 2e^{j\pi}\vec{a}_y$. Qual è la polarizzazione dell'onda?
   - ☐ ellittica
   - ☐ circolare destra
   - ☐ circolare sinistra
   - ☑ lineare

10) Data un'onda elettromagnetica piana uniforme i cui campi elettrico e magnetico nell'origine sono, rispettivamente, $\vec{E}_0 = 5\vec{a}_x\ [\mathrm{V/m}]$ e $\vec{H}_0 = -0.1\vec{a}_y\ [\mathrm{A/m}]$, l'onda si propaga:
   - ☐ in direzione +z
   - ☑ in direzione -z
   - ☐ in una direzione qualsiasi del piano (x,y)
   - ☐ in una direzione qualsiasi perpendicolare al piano (x,y)
   - ☐ in direzione +y