Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 13 luglio 2007

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

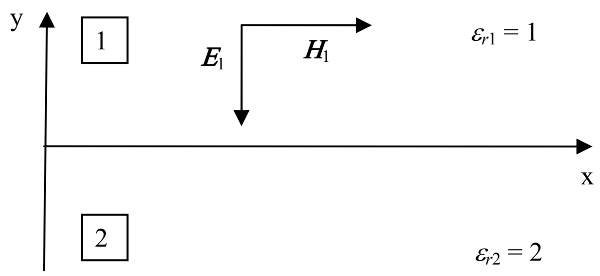
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

FIRMA ______________________

Esercizio 1



Si consideri l'interfaccia fra 2 mezzi dielettrici in figura, caratterizzati da $\varepsilon_{r1} = 1$ e $\varepsilon_{r2} = 2$. Conoscendo i campi nel mezzo 1, $\vec{H}_1 = 5\,\vec{a}_x$ e $\vec{E}_1 = -4\,\vec{a}_y$, determinare il campo magnetico $\vec{H}_2$ e il campo elettrico $\vec{E}_2$ nel secondo mezzo, nei seguenti casi:

a) assenza di cariche e correnti superficiali all'interfaccia fra i due mezzi;
b) presenza di una carica superficiale $\rho_S = 2 \cdot 10^{-11}$ C/m^2 e di una corrente superficiale $\vec{J} = -3\,\vec{a}_z$ A/m all'interfaccia fra i due mezzi.

Soluzione:

a) Nel caso di assenza di cariche e correnti all'interfaccia, il campo magnetico e il campo elettrico nel secondo mezzo si calcolano rispettivamente attraverso la conservazione della componente tangente di *H* e quella normale di *D*:

$$H_{2x} = H_{1x} = 5 \text{ A/m} \rightarrow \vec{H}_2 = 5\,\vec{a}_x \text{ A/m}$$

$$D_{2y} = D_{1y} \rightarrow \varepsilon_2 E_{2y} = \varepsilon_1 E_{1y} \rightarrow E_{2y} = \frac{\varepsilon_1 E_{1y}}{\varepsilon_2} = -2 \text{ V/m} \rightarrow \vec{E}_2 = -2\,\vec{a}_y \text{ V/m}$$

b) In questo caso, si applicano ancora le stesse condizioni al contorno, ma tenendo in considerazione anche la presenza di cariche e correnti superficiali. Per il campo magnetico, data la corrente in direzione $\vec{a}_z$, è utile definire la circuitazione all'interfaccia in senso orario, da cui si ottiene:

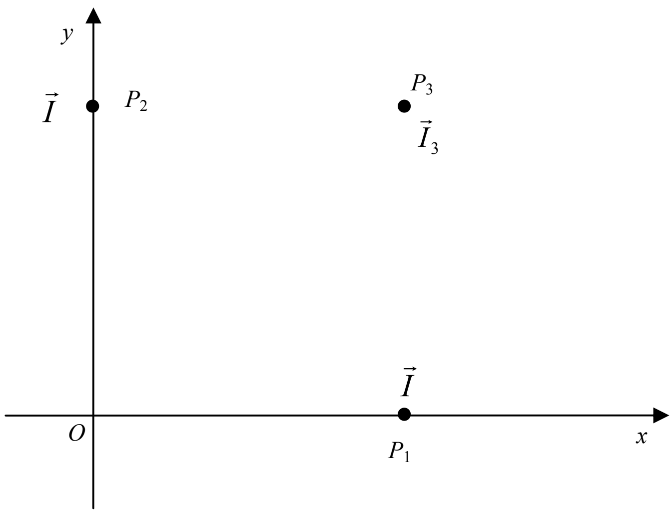
$H_{1x} - H_{2x} = 3 \rightarrow H_{2x} = H_{1x} - 3 = 2$ A/m $\rightarrow \vec{H}_2 = 2\,\vec{a}_x$ A/m

Per il campo elettrico, data la carica positiva, è utile definire il flusso uscente dalla superficie chiusa, da cui si ottiene:

$$D_{1y} - D_{2y} = 2 \cdot 10^{-11} \rightarrow E_{2y} = \frac{\varepsilon_1 E_{1y} - \rho_S}{\varepsilon_2} \approx -3.13 \text{ V/m} \rightarrow \vec{E}_2 = -3.13\,\vec{a}_y \text{ V/m}$$

Esercizio 2

Nei punti $P_1(3,0)$ e $P_2(0,3)$ (coordinate in metri) sono posti due fili conduttori percorsi da corrente costante pari a $\vec{I} = 0.05 \cdot \vec{a}_z$ [A]. Nel punto $P_3(3,3)$ è posto un terzo filo conduttore percorso da corrente costante $\vec{I}_3$; determinare $\vec{I}_3$ (modulo, direzione e verso) in modo che il campo magnetico totale, generato dai tre fili, sia nullo nell'origine degli assi O.



Soluzione:
Il filo posto in P_1 genera nell'origine un campo magnetico pari a:

$$\vec{H}_1 = -\frac{|\vec{I}|}{2 \cdot \pi \cdot 3} \vec{a}_y$$

Mentre il filo posto in P_2 genera, sempre nell'origine degli assi, un campo magnetico pari a:

$$\vec{H}_2 = \frac{|\vec{I}|}{2 \cdot \pi \cdot 3} \vec{a}_x$$

(I versi dei campi si determinano con la regola della mano destra). Il campo totale nell'origine generato dai due fili sarà dunque

$$\vec{H}_{1,2} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{|\vec{I}|}{2 \cdot \pi \cdot 3} \vec{a}_x - \frac{|\vec{I}|}{2 \cdot \pi \cdot 3} \vec{a}_y$$

Il filo in P_3 dovrà generare un campo magnetico di uguale modulo e direzione ma verso opposto; la corrente $\vec{I}_3$ dovrà quindi fluire in direzione $-\vec{a}_z$ e per il modulo:

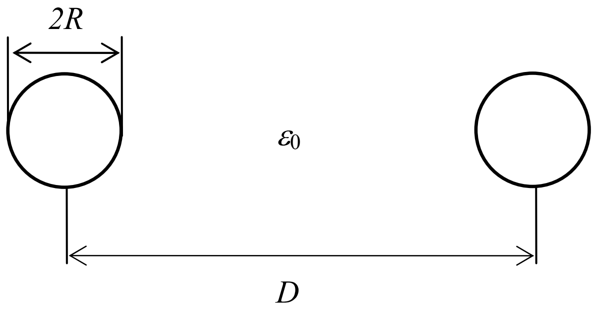
$$|\vec{H}_1 + \vec{H}_2| = |\vec{H}_3| \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot I}{6 \cdot \pi} = \frac{I_3}{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} \Rightarrow I_3 = 2 \cdot I$$

Perciò:

$$\vec{I}_3 = -0.1 \cdot \vec{a}_z \quad \text{[A]}$$

Esercizio 3

Dimensionare (calcolare la distanza, D, e il raggio, R, dei conduttori assunti uguali) la linea in aria di figura in modo che l'impedenza caratteristica Z_c sia pari a 75 Ω e che la costante di attenuazione alla frequenza di 100 MHz sia inferiore a 10 dB/km (conduttanza dei conduttori $\sigma = 5 \cdot 10^7\ \mathrm{S/m}$).
Suggerimento: si utilizzi l'approssimazione dei conduttori sottili.



Soluzione:

$$\alpha = \frac{r}{2Z_c} \le \frac{10}{8686}\,\mathrm{Np/m} = 0.0023\,\mathrm{Np/m}$$

$$r = \frac{2}{2\pi\sigma R\delta} = \frac{1}{\pi\sigma R\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi f\mu_0\sigma}} = 7.12\mu\mathrm{m}$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi\sigma R\delta 2Z_c} \le 0.0012\,\mathrm{Np/m}$$

$$R \ge \frac{1}{\alpha\pi\sigma\delta 2Z_c} = 5.2\ \mathrm{mm}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\ln(D/R)}{\pi}$$

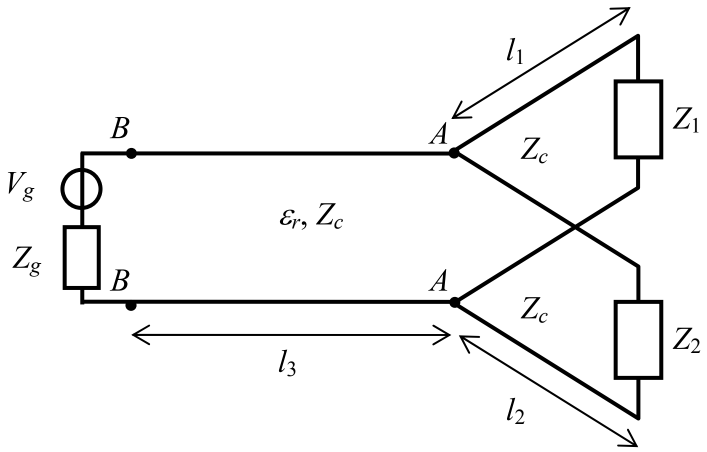
$$\frac{D}{R} = \exp\left(Z_c\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right) = 1.87$$

NB: con questo rapporto la bifilare non realizzabile in quanto la distanza fra i conduttori deve essere almeno pari al doppio del raggio dei conduttori stessi

Esercizio 4

Data la linea di trasmissione in figura, calcolare:

a. Il modulo della tensione alla sezione BB;
b. La potenza totale fornita dal generatore ai carichi;
c. La potenza assorbita da ognuno dei due carichi.



$V_g = 50\cos(2\pi\, 300\cdot 10^6\, t)$ [V]
$Z_g = 100$ [Ω]
$Z_1 = Z_2 = 100$ [Ω]
$Z_c = 50$ [Ω] (ovunque)
$\varepsilon_r = 1$ (ovunque)
$l_1 = 15$ cm
$l_2 = 1.4$ m
$l_3 = 3.25$ m

Soluzione:

Dapprima si riportano i carichi alla sezione AA. La lunghezza d'onda vale $\lambda = c/f = 1$ m, da cui si ottengono le lunghezze normalizzate:

$$\bar{l}_1 = l_1/\lambda = 0.15 \qquad \bar{l}_2 = l_2/\lambda = 1.4 = 1 + 0.4 \qquad \bar{l}_3 = l_3/\lambda = 3.25 = 3 + 0.25$$

Dalla carta di Smith (si parte dal punto 2+j0) si ottiene il valore dei carichi Z_1 e Z_2 normalizzati alla sezione AA:

$$\bar{Z}_{1A} = 0.67 - j0.48 \quad \rightarrow \quad \bar{Y}_{1A} = 0.98 + j0.7$$

$$\bar{Z}_{2A} = 0.98 + j0.7 \quad \rightarrow \quad \bar{Y}_{2A} = 0.67 - j0.48$$

I carichi in parallelo si sommano in ammettenza e si ottiene il carico totale alla sezione AA:

$$\bar{Y}_A = \bar{Y}_{1A} + \bar{Y}_{2A} = 1.65 + j0.22 \quad \rightarrow \quad \bar{Z}_A = 0.6 - j0.08 \quad \rightarrow \quad Z_A = \bar{Z}_A Z_C = 29.8 - j3.97 \ \Omega$$

Dato che il tratto l_3 è un $\lambda/4$, il carico Z_A portato alla sezione BB diventa:

$$Z_B = \frac{Z_C^2}{Z_A} = 82.4 + j10.9$$

Si può determinare il modulo della tensione alla sezione BB tramite il partitore:

$$|V_B| = |V_g| \left| \frac{Z_B}{Z_B + Z_g} \right| = 22.75 \ \text{V}$$

Il coefficiente di riflessione alla sezione BB rispetto al generatore vale:

$$\Gamma = \frac{Z_B - Z_g}{Z_B + Z_g} = -0.092 + j0.066 \quad \rightarrow \quad |\Gamma| = 0.11$$

La potenza fornita ai carichi dal generatore è:

$$P_L = P_d\,(1-|\Gamma|^2) = \frac{|V_g|^2}{8\,\mathrm{Re}(Z_g)}(1-|\Gamma|^2) = 3.1\ \mathrm{W}$$

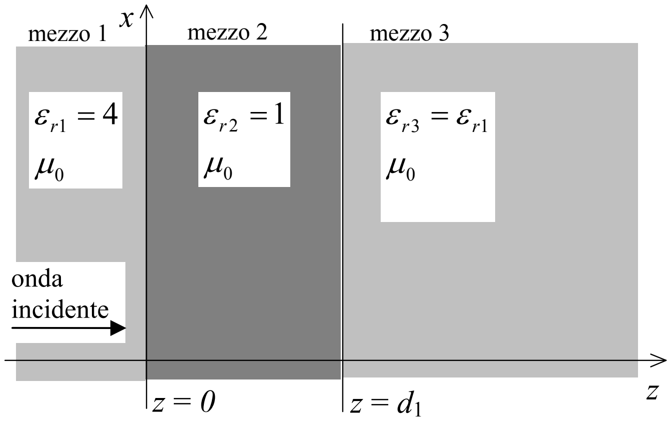
Tale potenza passa la sezione BB e viene assorbita dai carichi proporzionalmente alla parte reale dell'ammettenza che mostrano alla sezione AA:

$$P_{Z1} = P_L\,\frac{\mathrm{Re}(Y_{1A})}{\mathrm{Re}(Y_{1A})+\mathrm{Re}(Y_{2A})} = 1.8\ \mathrm{W} \qquad P_{Z2} = P_L - P_{Z1} = 1.3\ \mathrm{W}$$

Esercizio 5

Dato il multistrato di figura, si supponga che un'onda piana uniforme si propaghi nel mezzo 1 in direzione +z con campo elettrico incidente alla sezione z = 0 pari a $\vec{E}_i(z=0)=5\vec{a}_y\ (\text{V/m})$ alla frequenza di 300 MHz. Calcolare:

a. il <u>vettore fasore</u> campo magnetico totale alla sezione z = 0;
b. la densità di potenza reale trasmessa al mezzo 3;
c. il <u>vettore fasore</u> campo elettrico totale alla sezione $z = d_1$ = 50 cm.



Soluzione:

Poiché λ=1 m, d_1=λ_2/2 e quindi non si ha riflessione all'interfaccia z=0.
Nel mezzo 1 alla sezione z=0, esiste solo l'onda incidente:

$$\vec{H}_{tot}(z=0)=\vec{H}_i(z=0)=-\frac{\left|\vec{E}_i(z=0)\right|}{\eta_1}\vec{a}_x=-\frac{2\left|\vec{E}_i(z=0)\right|}{\eta_0}\vec{a}_x=-26.5\vec{a}_x\quad\left(\frac{\text{mA}}{\text{m}}\right)$$

La densità di potenza trasmessa al mezzo 3 è la totale densità di potenza incidente:

$$S_t=S_1=\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_i(z=0)\right|}{\eta_1}=66.3\ \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

Dalla carta di Smith si calcola il coefficiente di riflessione nel secondo mezzo per z=0:

$$\Gamma_2(z=0)=\Gamma_2(z=d_1)=\frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_3+\eta_2}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{r1}}}=-\frac{1}{3}$$

Si può quindi calcolare il fasore del campo elettrico dell'onda progressiva nel mezzo 2:

$$E_{20}^{+}=\frac{E_i(z=0)}{1+\Gamma_2(z=0)}=7.5\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

Allora:

$$E_2^{+}(z=d_1)=E_{20}^{+}\exp(-j\beta_2 d_1)=E_{20}^{+}\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{2}\right)=-E_{20}^{+}=-7.5\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

$$E_2(z=d_1)=E_2^{+}(z=d_1)\cdot\left[1+\Gamma_2(z=d_1)\right]=-5\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

Per la continuità del campo elettrico si ha:

$$\vec{E}_3(z=d_1)=\vec{E}_2(z=d_1)=-5\vec{a}_y\quad\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$$

Domande *(sono possibili risposte multiple; alle risposte errate è associato un punteggio negativo)*:

6) Sulla superficie di un conduttore elettrico perfetto:
   - ☐ il campo elettrico $\vec{E} = 0$
   - ☑ la componente tangenziale del campo elettrico $E_t = 0$
   - ☐ la componente normale del campo elettrico $E_n = 0$
   - ☐ la componente tangenziale del campo magnetico $H_t = 0$
   - ☐ la componente normale del vettore induzione dielettrica $D_n = 0$

7) L'onda elettromagnetica che si propaga lungo una linea di trasmissione reale (presenza di perdite):
   - ☐ è tutta contenuta nel dielettrico
   - ☐ è tutta contenuta nel conduttore
   - ☐ ha componenti $\vec{E}$ e $\vec{H}$ solo perpendicolari alla direzione di propagazione
   - ☑ ha componenti di $\vec{E}$ lungo la direzione di propagazione
   - ☑ interessa sia il dielettrico che il conduttore

8) Un'onda elettromagnetica con $\vec{E} = j(\vec{a}_x + 3\vec{a}_y)e^{-j\beta z}$ ha:
   - ☑ polarizzazione lineare
   - ☐ polarizzazione ellittica sinistrorsa
   - ☐ polarizzazione circolare destrorsa
   - ☑ componente del campo magnetico in direzione y
   - ☑ componente del campo magnetico in direzione $-x$

9) Un campo magnetico statico diretto lungo l'asse x agente su una particella carica negativa in moto lungo la direzione z:
   - ☐ non provoca alcun effetto
   - ☐ accelera la particella in direzione z
   - ☐ frena il moto della particella
   - ☐ accelera la particella in direzione x
   - ☑ devia il moto della particella

10) Un'onda elettromagnetica che si propaga lungo una linea di trasmissione con perdite subisce una diminuzione della potenza trasportata tra due punti distanti 100 m di un fattore 10. L'attenuazione della linea è:
   - ☑ 100 dB/km
   - ☐ 20 Np/m
   - ☐ 2 dB/km
   - ☐ 10 dB/m
   - ☐ 100 Np/km