Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 2 luglio 2007

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

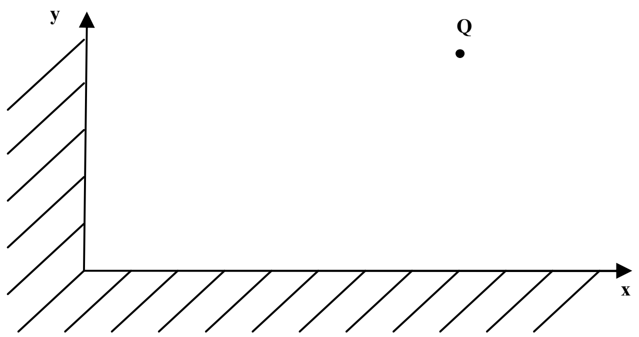
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

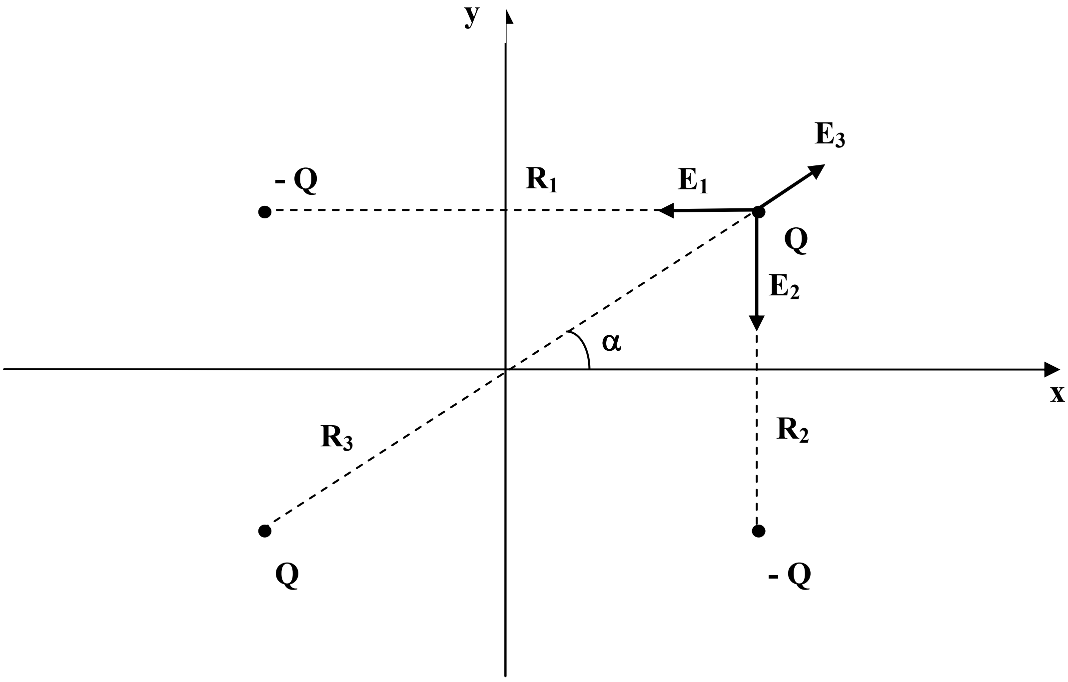
Esercizio 1



Una carica puntiforme $Q = 10^{-9}$ C è posta nel vuoto di fronte a un doppio piano di massa (vedere figura) nel punto di coordinate ($x = 3\ m, y = 2\ m$). Calcolare la forza (modulo e direzione) a cui è sottoposta la carica Q.

Soluzione:

L'effetto dei piani di massa può essere rappresentato da 3 cariche immagine disposte come nella seguente figura:



La forza agente sulla carica Q dipende dall'interazione con le altre 3 cariche. E' necessario calcolare il campo elettrico risultante sulla carica Q e in seguito determinare la forza agente su di essa:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

La formula del campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto è:

$$E_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^{\,2}}$$

dove i = 1,2,3 indica i tre contributi di campo e R_i è la distanza fra la carica che genera il campo e il punto in cui si vuole calcolare il campo stesso. Dalla figura si ha che R_1 = 6 m, R_2 = 4 m e $R_3 \approx 7.2$ m. Sommando i contributi dei 3 campi nelle due direzioni x e y si ottiene:

$$E_x = -|E_1| + |E_3|\cos(\alpha) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_1^{\,2}} + \frac{1}{R_3^{\,2}}\cos(\alpha)\right) \approx -0.105 \qquad \text{[V/m]}$$

$$E_y = -|E_2| + |E_3|\sin(\alpha) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2^{\,2}} + \frac{1}{R_3^{\,2}}\sin(\alpha)\right) \approx -0.465 \qquad \text{[V/m]}$$

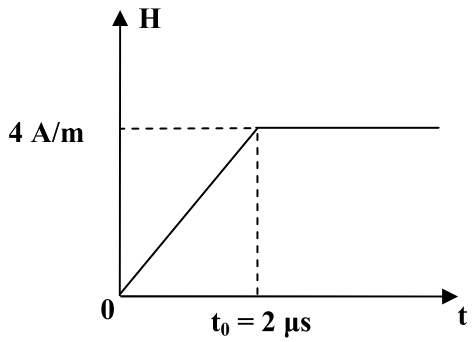
dove $\alpha = \tan^{-1}(2/3) \approx 33.7°$.

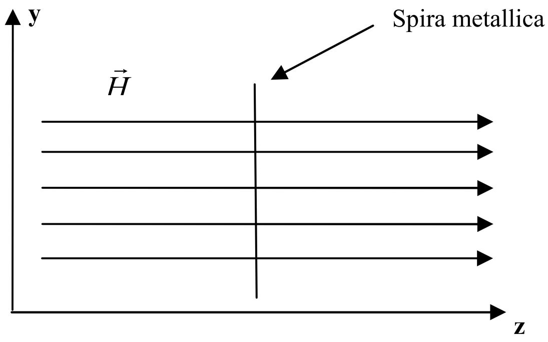
La forza agente sulla carica Q sarà quindi:

$$\vec{F} = Q\vec{E} = -1.05 \cdot 10^{-10}\,\vec{a}_x - 4.65 \cdot 10^{-10}\,\vec{a}_y \text{ N}$$

Esercizio 2

Una spira metallica quadrata di lato a = 1 m è immersa in un campo magnetico uniforme nello spazio in modo che la normale alla superficie della spira sia parallela alle linee di flusso del vettore $\vec{H}$, tempo variante, secondo la legge:





Per $t \geq 0$:

1) determinare l'equazione che esprime l'andamento di $\vec{H}$ nel tempo;
2) calcolare il flusso magnetico attraverso la spira;
3) calcolare la forza elettromotrice (f.e.m.) indotta sulla spira;
4) calcolare la corrente indotta nella spira se ad essa è associata una resistenza R = 50 Ω (Facoltativo: indicare anche se la corrente nel lato della spira riportato in figura scorre in direzione $\vec{a}_y$ o -$\vec{a}_y$)

Soluzione:

1) Dal diagramma si ricava facilmente l'andamento temporale del campo magnetico:

$$\vec{H} = \begin{cases} \dfrac{4}{2 \cdot 10^{-6}} t\, \vec{a}_z = 2 \cdot 10^6 t\, \vec{a}_z & 0 \leq t \leq t_0 \\ 4\vec{a}_z & t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{[A/m]}$$

2) Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira è dato da (facendo sì che la normale alla superficie e le linee di flusso siano parallele ed equiverse):

$$\phi_m(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int_S \vec{B}\, \vec{n}\, dS = |\vec{B}| \int_S dS = a^2 |\vec{B}| = a^2 |\vec{H}| \mu_0 = \begin{cases} 2 \cdot 10^6 t\, \mu_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 4\mu_0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{[Wb]}$$

ricordando che $a^2 = 1\ \text{m}^2$.

3) La f.e.m. indotta è data da:

$$\text{f.e.m.} = -\frac{\partial \phi_m}{\partial t} = \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(2 \cdot 10^6 t\, \mu_0\right) & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}(4\mu_0) & t \geq t_0 \end{cases} = \begin{cases} -2 \cdot 10^6 \mu_0 \approx -2.5 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad \text{[V]}$$

4) Considerando la normale alla superficie diretta come $\vec{a}_z$ (come al punto 3), si deve considerare la corrente circolante dall'alto verso il basso nel lato della spira visibile in figura. Si ottiene:

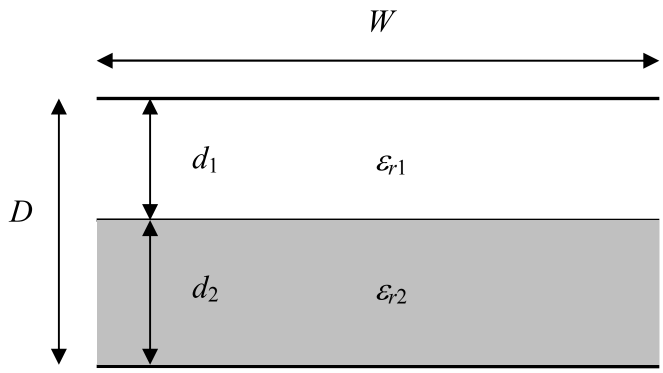
$$I = \frac{V}{R} = -\frac{2.5}{50} = -50 \quad \text{[mA]}$$

La corrente quindi in realtà scorre dal basso verso l'alto nel lato della spira visibile in figura.

Esercizio 3

Data la linea di trasmissione in figura, di cui sono noti i valori $W = 1$ cm, $D = 2.1$ mm, $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 5$, si determini il valore di d_1 affinché l'impedenza caratteristica Z_c della linea sia 50 Ω. Calcolare inoltre la costante di fase dell'onda alla frequenza di 100 MHz

Suggerimento: si trascurino gli effetti di bordo.



Soluzione:

L'impedenza caratteristica è definita come $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L_0}{C}}$, dato che per i mezzi considerati $\mu = \mu_0$.

Per questa struttura $L_0 = \mu_0 \frac{D}{W} \approx 2.6 \cdot 10^{-7}$ H/m (ricavabile anche dalle relazione $L_0 C_0 = \varepsilon_0 \mu_0$.

La presenza di due mezzi dielettrici come figura determina una capacità totale della struttura data dalla serie di due capacità:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 W} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 W} = \frac{d_1 \varepsilon_{r2} + (D - d_1)\varepsilon_{r1}}{W \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} \varepsilon_0}$$

Sostituendo le espressioni di L_0 e C in Z_C, si ottiene:

$$Z_C = \sqrt{\mu_0 \frac{D}{W} \frac{d_1 \varepsilon_{r2} + (D - d_1)\varepsilon_{r1}}{W \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} \varepsilon_0}} = 50\ \Omega$$

Da cui, invertendo l'espressione, si può ricavare d_1:

$$d_1 = \left(\frac{Z_C^2 W^2 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} \varepsilon_0}{D \mu_0} - D \varepsilon_{r1} \right) \frac{1}{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}} \approx 0.5 \text{ mm}$$

$$d_2 = D - d_1 = 1.6 \text{ mm}$$

Si può ora calcolare il valore di C:

$$C = \frac{W \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} \varepsilon_0}{d_1 \varepsilon_{r2} + (D - d_1)\varepsilon_{r1}} \approx 1.1 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$$

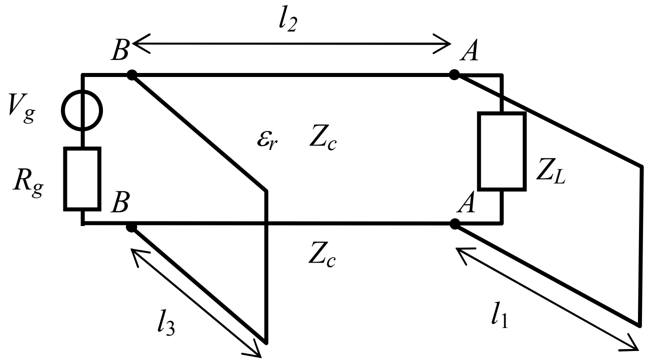
La costante di fase vale:

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \approx 3.3 \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 4

Dato il circuito in figura, calcolare:

a. La potenza assorbita dal carico;
b. Il modulo della corrente alle sezione *A-A*;
c. Il modulo della tensione alla sezione *B-B*.



$V_g = 50 \cos(2\pi\, 75 \cdot 10^6\, t)$ [V]
$R_g = 50$ [Ω]
$Z_L = 20 - j\, 40$ [Ω]
$Z_c = 50$ [Ω]
$\varepsilon_r = 4$ (per tutte le linee)
$l_1 = 25$ cm
$l_2 = 1.8$ m
$l_3 = 50$ cm

Soluzione:

Per calcolare la potenza che arriva al carico, è necessario calcolare l'impedenza alla sezione del generatore. Si inizia ottenendo il carico totale alla sezione AA, sommando le ammettenze in parallelo del carico Z_L e dello stub 1 (riportato alla sezione AA).

$$\overline{Z}_L = 0.4 - j0.8 \rightarrow \overline{Y}_L = 0.5 + j$$

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = 2 \text{ m} \rightarrow \bar{l}_1 = \frac{l_1}{\lambda} = 0.125$$

Considerando il CC per lo stub 1, ruotando sulla carta di Smith della lunghezza normalizzata $\bar{l}_1$ si ottiene:

$$\overline{Y}_{S1} = -j$$

Sommando le impedenze in parallelo, si ottiene alla sezione AA:

$$\overline{Y}_A = \overline{Y}_L + \overline{Y}_{S1} = 0.5 \rightarrow \overline{Z}_A = 2$$

Bisogna ora riportare l'impedenza Z_A alla sezione BB e nuovamente sommare le ammettenze in parallelo (carico + stub 2 riportato alla sezione BB).

$$\bar{l}_2 = \frac{l_2}{\lambda} = 0.9 = 0.5 + 0.4$$

Dalla carta di Smith si ruota di $\bar{l}_2$ per ottenere l'impedenza alla sezione BB:

$$\overline{Z}_B \approx 0.975 + j0.7$$

Lo stub 2 è di lunghezza normalizzata $\bar{l}_3 = \lambda/4$, per cui il CC riportato alla sezione BB è un CA, quindi dà contributo di ammettenza nulla nella somma in parallelo. Si ottiene quindi un'impedenza finale alle sezione BB:

$$Z_B = (0.975 + j0.7)Z_C = 48.75 + j35\ \Omega$$

La potenza assorbita dal carico è data da:

$$P_L = P_d(1-|\Gamma|^2) = 5.5\ \text{W}$$

con $\Gamma = \dfrac{Z_B - R_g}{Z_B + R_g} \approx 0.1 + j0.3 \rightarrow |\Gamma| \approx 0.33$ e $P_d = \dfrac{|V_g|^2}{8R_g} = 6.25\ \text{W}$.

Il modulo della tensione alla sezione AA è data:

$$|V_A| = |V_L| = \sqrt{\frac{2P_L}{\text{Re}[Y_L]}} \approx 33.2\ \text{V} \qquad |I_A| = \frac{|V_A|}{|Z_A|} \approx 0.332\ \text{A}$$

Il modulo della corrente alla sezione BB è dato da:

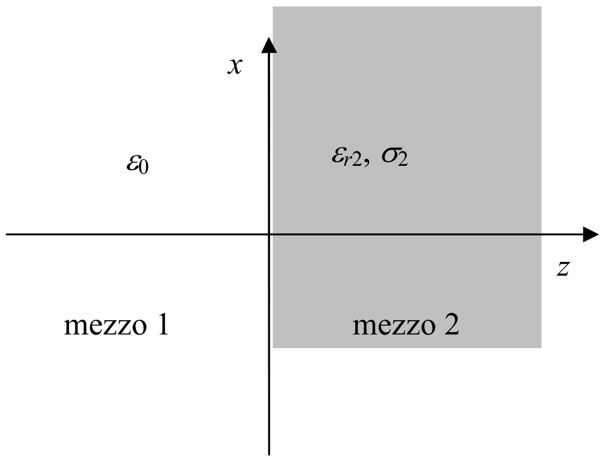
$$|I_B| = \frac{|V_B|}{|Z_B|} = \frac{|V_g|}{|Z_B + R_g|} \approx 0.48\ \text{A} \qquad |I_B| = \frac{|V_g||Z_B|}{|Z_B + R_g|} \approx 28.8\ \text{V}$$

Esercizio 5

Un'onda piana con frequenza 100 kHz si propaga in aria e alla sezione A-A il suo campo elettrico è dato da $\vec{E}(z=0)=2j\ a_x\ (\mathrm{V/m})$. La sezione A-A coincide con la superficie di discontinuità con un mezzo 2 avente costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r2}=2$ e conduttività $\sigma_2=10^{-3}\ (\mathrm{S/m})$. Calcolare:

a) La densità di potenza trasmessa al mezzo 2;
b) Il modulo del campo elettrico per $z=\lambda_2$ (essendo λ_2 la lunghezza d'onda nel secondo mezzo).

Suggerimento: si assumano per il mezzo 2 le approssimazioni valide per un buon conduttore.



Soluzione:

Applicando l'approssimazione per buoni conduttori, si ottiene:

$$\alpha_2=\beta_2=\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_2}{2}}=0.02\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\eta_2=(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma_2}}=19.85+j19.85\quad\Omega$$

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_0}{\eta_2+\eta_0}=-0.895+j0.095$$

La potenza trasmessa nel mezzo 2 è data da:

$$S_t=S_i(1-|\Gamma|^2)\approx 1\quad\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m^2}}$$

considerando che $|\Gamma|\approx 0.9$ e che $S_i=\frac{1}{2}\frac{|Ei|^2}{\eta_0}=5.3\quad\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{m^2}}$.

La lunghezza d'onda nel mezzo 2 è pari a:

$$\lambda_2=\frac{2\pi}{\beta_2}=314\ \mathrm{m}$$

Il modulo del campo trasmesso nel mezzo 2 per $z=0$ m è:

$$|E_t(z=0)|=|E_i(z=0)||1+\Gamma|\approx 0.283\ \mathrm{V/m}$$

A distanza $z=\lambda_2$ il modulo del campo elettrico vale:

$$|E_t(z=\lambda_2)|=|E_t(z=0)|e^{-\alpha_2\lambda_2}=5.3\cdot 10^{-4}\ \mathrm{V/m}$$

Domande *(sono possibili risposte multiple; alle risposte errate è associato un punteggio negativo)*:

6) Il fenomeno della polarizzazione di un materiale dielettrico in presenza di un campo esterno, consiste:
   - ☐ nella creazione di spire di corrente a livello atomico
   - ☑ nella creazione di dipoli elettrici in prevalenza orientati nel verso del campo esterno
   - ☐ nella creazione di accumuli di cariche libere di segno opposto all'interno del materiale
   - ☐ nella ridistribuzione istantanea delle cariche libere fino al raggiungimento dell'equilibrio
   - ☐ nella creazione di dipoli elettrici in prevalenza orientati in verso opposto del campo esterno

7) La conduttività elettrica σ è proporzionale:
   - ☐ alla densità volumetrica di corrente
   - ☐ alla densità superficiale di corrente
   - ☑ alla mobilità dei portatori di carica
   - ☑ all'intensità di carica dei portatori
   - ☐ al campo magnetico

8) Il flusso magnetico uscente da una superficie chiusa in un mezzo lineare; è:
   - ☐ nullo solo se siamo in regime tempo variante
   - ☐ nullo solo se siamo in regime stazionario
   - ☑ sempre nullo
   - ☐ è sempre maggiore di zero
   - ☐ nullo solo se siamo in regime sinusoidale stazionario

9) Un onda piana TEM si propaga:
   - ☐ solo nei mezzi senza perdite
   - ☐ solo nei conduttori perfetti
   - ☐ solo nei materiali dielettrici
   - ☑ in qualsiasi mezzo che non sia un conduttore perfetto
   - ☐ solo nei mezzi con perdite

10) Se, in una linea di trasmissione, tensione e corrente dell'onda incidente su un carico sono in fase, allora
   - ☐ l'impedenza del carico è puramente immaginaria
   - ☑ la linea è senza perdite
   - ☐ l'impedenza del carico è puramente reale
   - ☐ anche per l'onda riflessa tensione e corrente sono in fase
   - ☐ non esiste l'onda riflessa