Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 7 settembre 2007

1	2	3	4	5	6	7	8	9

non scrivere nella zona soprastante

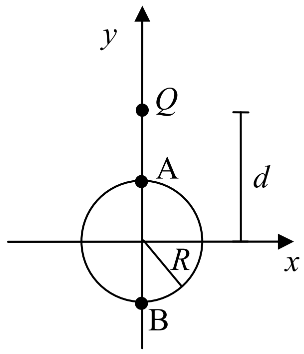
COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1

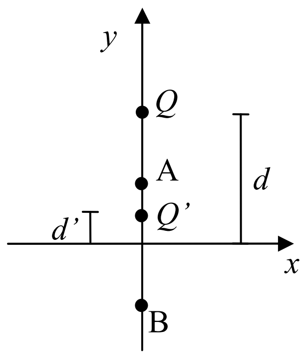
Una carica puntiforme $Q = 10^{-12}$ C è posta (in aria) in prossimità di una sfera di conduttore perfetto di raggio R = 5 cm (si faccia riferimento alla figura). Calcolare la densità superficiale di carica indotta sulla sfera (valore e segno) nei punti *A* e *B*.



A(0,5 cm)
B(0,-5 cm)
d = 10 cm
$Q = 10^{-12}$ C
R = 5 cm

Soluzione:

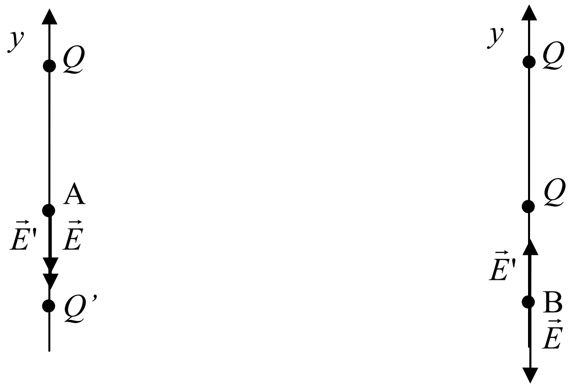
Applicando il metodo delle cariche immagine, è possibile sostituire la sfera con una carica puntiforme di valore $Q' = -R\,Q/d = -5\cdot10^{-13}$ posta a distanza d' = R^2/d = 2.5 cm dall'origine degli assi (si faccia riferimento alla figura sottostante).



Per il calcolo della densità di carica superficiale si sfruttano le condizioni al contorno per il campo elettrico normale alla superficie della sfera e, ricordando che il campo elettrico nel conduttore perfetto è nullo, si ottiene semplicemente:

$$\sigma = D_n = \varepsilon_0 E_y$$

Scegliendo di calcolare la componente y di $\vec{D}$, automaticamente si ottiene anche il segno di σ.
Il campo elettrico nel punto A è la somma dei campi elettrici generati dalle 2 cariche (entrambi rivolti come $-\vec{a}_y$). Nel punto B, i campi elettrici si sommano in verso opposto. Si faccia riferimento alla figura sottostante, dove $\vec{E}$ si riferisce al campo generato da Q e $\vec{E}'$ a quello generato da Q':



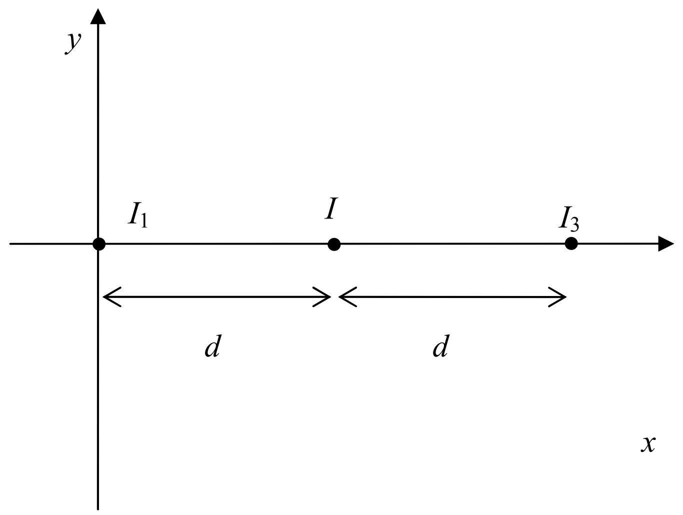
Tenendo conto dei versi dei campi riportati in figura, si ottiene quindi:

$$\sigma_A = \varepsilon_0 \left[-\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 (d-R)^2} - \frac{|Q'|}{4\pi\varepsilon_0 (R-d')^2} \right] \approx -9.5\cdot 10^{-11} \ \text{C/m}^2$$

$$\sigma_B = \varepsilon_0 \left[\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 (R+d)^2} - \frac{|Q'|}{4\pi\varepsilon_0 (R+d')^2} \right] \approx -3.5\cdot 10^{-12} \ \text{C/m}^2$$

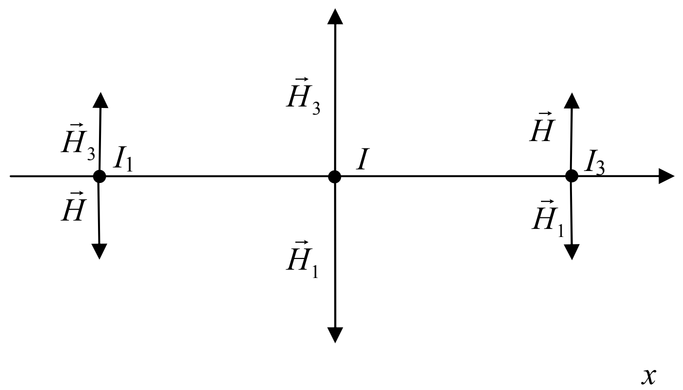
Esercizio 2

Dati i 3 fili paralleli in figura, sapendo che il filo centrale è percorso da una corrente I uscente dal piano del foglio, calcolare verso e intensità delle correnti I_1 e I_3 che scorrono negli altri fili, in modo che i 3 fili rimangano in equilibrio (la forza totale che agisce su ciascuno di essi deve essere nulla).



Soluzione:

Perché i fili rimangano in equilibrio, su di essi deve agire necessariamente un campo magnetico nullo. Perché ciò sia possibile è necessario scegliere i versi delle correnti I_1 e I_3 entranti nel foglio. In tal modo si ottengono infatti i seguenti campi magnetici in corrispondenza dei fili ($\vec{H}$,$\vec{H}_1$ e $\vec{H}_3$ sono generati rispettivamente dalle correnti I, I_1 e I_3):



Per determinare l'intensità di I_3, si può annullare il campo magnetico agente su I_1:

$$\vec{H}_T = \vec{H} + \vec{H}_3 = \frac{|I|}{2\pi d} - \frac{|I_3|}{2\pi(2d)} = 0 \quad \Rightarrow \quad |I_3| = 2|I|$$

La stessa cosa vale per I_1 (si annulla il campo magnetico agente su I_3):

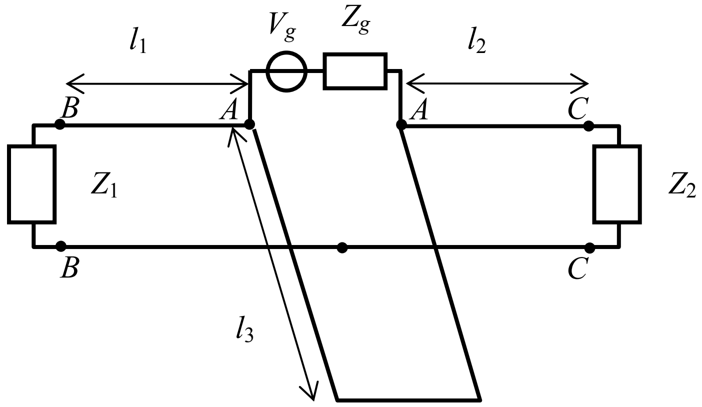
$$|I_1| = 2|I|$$

E' facile verificare che in questo modo anche il campo magnetico agente su I si annulla: tutti i fili sono in equilibrio come voluto.

Esercizio 3

Nel circuito in figura tutte le linee di trasmissione sono costituite da cavi coassiali con le medesime caratteristiche (rapporto fra i raggi dei conduttori b/a= 2.7, costante dielettrica ε_r=2). Sapendo che il circuito opera alla frequenza f=300 MHz, calcolare:

a. le lunghezze l_1 e l_2 in metri;
b. la lunghezza l_3 affinché il carico complessivo alla sezione *A-A* sia reale;
c. la potenza assorbita complessivamente dai carichi Z_1 e Z_2, nella configurazione al punto b;
d. i moduli delle tensioni alle sezione *B-B* e *C-C*.



V_g = 100 [V]
Z_g = 50 [Ω]
f = 300 MHz
Z_1 = 100 [Ω]
Z_2 = 50 + j 50 [Ω]
l_1 = 4.2 λ
l_2 = 2.1 λ

Soluzione:

Conoscendo le caratteristiche del coassiale, si può derivare l'impedenza caratteristica delle linee:

$$Z_c = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx 42.1 \quad \Omega$$

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} \approx 0.7071 \text{ m}$$

da cui si ricavano le lunghezze: $l_1 = 4.2\lambda = 2.97$ m e $l_2 = 2.1\lambda = 1.485$ m.

Il carico Z_1, normalizzato e riportato alla sezione AA, vale (usando la carta di Smith):

$$\overline{Z}_{1AA} = 0.458 - j0.266 \quad \Rightarrow \quad Z_{1AA} = 19.3 - j11.2\,\Omega$$

$$\overline{Z}_{2AA} = 2.407 - j0.975 \quad \Rightarrow \quad Z_{2AA} = 101.3 - j41\,\Omega$$

Alla sezione AA, i due carichi in serie si sommano in impedenza e si ottiene:

$$\overline{Z}_{LAA} = 2.865 - j1.241 \quad \Rightarrow \quad \overline{Y}_{LAA} = 0.294 + j0.127$$

Per ottenere un carico reale alla sezione AA, il CC riportato alla sezione AA deve essere $\overline{Y}_{CC} = -j0.127$ (i carichi si sommano in ammettenze perché in parallelo).

Dalla carta di Smith si ricava una distanza $l_3 = 0.23\lambda = 0.1626$ m. Alla sezione AA si ottiene quindi un carico complessivo reale:

$$\overline{Y}_{AA} = 0.294 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{AA} = 3.4 \quad \Rightarrow \quad Z_{AA} = 143.1\,\Omega$$

Si può determinare il coefficiente di riflessione:

$$\left|\Gamma_g\right| = \left|\frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g}\right| = 0.482$$

Dalla potenza disponibile si ricava la potenza che viene assorbita dai due carichi:

$$P_d = \frac{\left|V_g\right|^2}{8\,\mathrm{Re}(Z_g)} = 25 \text{ W} \qquad\qquad P_L = P_d\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = 19.19 \text{ W}$$

La potenza si ripartisce sui due carichi in modo proporzionale alla parte reale dell'impedenza dei carichi stessi alla sezione AA (i carichi sono in serie e sono dunque percorsi dalla stessa corrente):

$$\mathrm{Re}(Z_{1AA}) = 19.3\,\Omega \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(Z_{2AA}) = 101.3\,\Omega$$

$$P_1 = P_L \frac{\mathrm{Re}(Z_{1AA})}{\mathrm{Re}(Z_{1AA}) + \mathrm{Re}(Z_{2AA})} = 3.07 \text{ W} \qquad\qquad P_2 = P_L \frac{\mathrm{Re}(Z_{2AA})}{\mathrm{Re}(Z_{1AA}) + \mathrm{Re}(Z_{2AA})} = 16.12 \text{ W}$$

Si ricavano quindi le tensioni (in modulo) alle sezioni BB e CC:

$$\left|V_B\right| = \sqrt{\frac{2P_1}{\mathrm{Re}(Y_1)}} = 24.78 \text{ V}$$

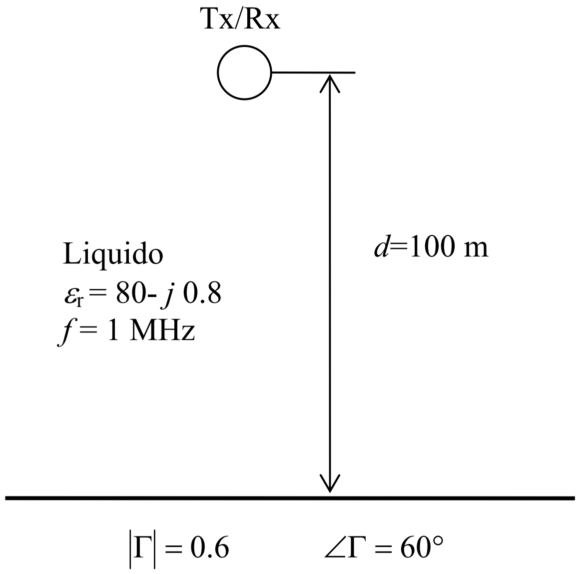
$$\left|V_C\right| = \sqrt{\frac{2P_2}{\mathrm{Re}(Y_2)}} = 56.77 \text{ V}$$

Esercizio 4

Un trasmettitore/ricevitore è immerso in un liquido come mostrato in figura; supponendo che invii verso il fondo (in corrispondenza del quale si misura un coefficiente di riflessione $\Gamma = 0.6e^{j60°}$) un'onda piana alla frequenza f = 1 MHz, calcolare:

a. il modulo del campo elettrico E incidente sul fondale supposta la densità di potenza trasmessa pari a 1 W/m^2;
b. la densità di potenza da trasmettere affinché la densità di potenza al ricevitore (co-locato con il trasmettitore) sia pari a 1 $\mu W/m^2$.

Suggerimento: si utilizzi l'approssimazione dei mezzi con piccole perdite.



Soluzione:

a) Usando l'approssimazione per mezzi con piccole perdite si ottiene il coefficiente di attenuazione:

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon'_r\,\varepsilon_0}} \approx 9.4\cdot 10^{-4}\ \text{Np/m} \quad \text{con} \quad \sigma_e = \omega\varepsilon_0\varepsilon''_r = 4.45\cdot 10^{-5}\ \text{S/m}$$

Per piccole perdite si può assumere l'impedenza intrinseca reale:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon'_r\,\varepsilon_0}} \approx 42.12 \quad \Omega$$

Invertendo la formula che fornisce la densità di potenza in funzione del modulo del campo elettrico si ha:

$$S_t = \frac{1}{2}\frac{|E_t|^2}{\eta} \quad \Rightarrow \quad |E_t| = \sqrt{2\eta S_t} \approx 9.18\ \text{V/m}$$

Il campo incidente sul fondale sarà (in modulo):

$$|E_i| = |E_t|e^{-\alpha d} \approx 8.36\ \text{V/m}$$

b) La densità di potenza ricevuta in funzione di quella trasmessa, dopo la riflessione è:

$$S_r = S_t e^{-2\alpha d}|\Gamma|^2 e^{-2\alpha d} \quad \Rightarrow \quad S_t = \frac{S_r e^{4\alpha d}}{|\Gamma|^2} \approx 4.04\ \mu\,\text{W/m}^2$$

Domande *(sono possibili risposte multiple; alle risposte errate è associato un punteggio negativo)*:

5) In un materiale magnetico, sottoposto ad un campo magnetico esterno, si induce:
- ☐ sempre un campo magnetico di intensità superiore al campo esterno
- ☐ sempre un campo magnetico di intensità inferiore al campo esterno
- ☐ sempre un campo magnetico diretto come il campo esterno
- ☐ sempre un campo magnetico opposto al campo esterno
- ☑ sempre un campo magnetico

6) Se il coefficiente di riflessione in una data sezione di una linea di trasmissione senza perdite vale Γ=1, allora:
- ☐ Γ=1 in ogni sezione
- ☑ $|\Gamma|$=1 in ogni sezione
- ☐ la fase di Γ può essere solo 0° o 180°
- ☐ la fase di Γ è pari a 0° in ogni sezione
- ☑ la fase di Γ può variare da 0 a 2π muovendosi lungo la linea di trasmissione

7) L'espressione $E(y,t) = A\cos(\omega t)\cdot\cos(\beta y)$ è quella del campo elettrico di un'onda piana che necessariamente:
- ☐ ha campo elettrico diretto come y
- ☐ si propaga in direzione y
- ☐ ha campo magnetico diretto come y
- ☐ ha campo magnetico diretto come x
- ☑ non si propaga

8) Per deviare una particella carica negativamente che si muove con velocità $\vec{v}_x$, in direzione +z si può sottoporla a:
- ☐ un campo elettrico E in direzione -y
- ☐ un campo elettrico E in direzione +z
- ☐ un campo magnetico H in direzione +z
- ☑ un campo magnetico H in direzione -y
- ☐ un campo magnetico H in direzione +y

9) Se un'onda piana uniforme, che si propaga in un mezzo senza perdite, incide ortogonalmente su un conduttore perfetto, allora:
- ☐ la densità di potenza riflessa dipende dall'impedenza del mezzo da cui proviene l'onda
- ☑ la densità di potenza riflessa è pari a quella incidente
- ☐ la densità di potenza riflessa è pari a zero
- ☑ la densità di potenza trasmessa nel conduttore è pari a zero
- ☐ la densità di potenza trasmessa nel conduttore è pari alla metà della potenza incidente