Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 13 febbraio 2008

1	2	3	4	5	6	7	8	9

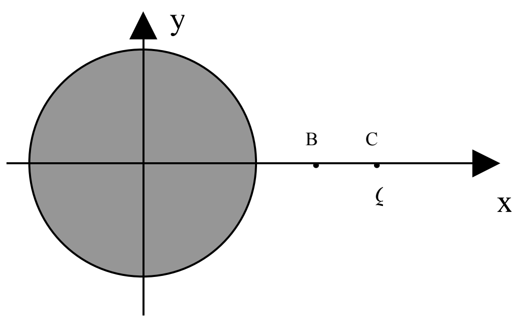
non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1



Su una sfera dielettrica cava (raggio della sfera R = 4 m) è depositata uniformemente una densità di carica volumetrica $\rho = 10^{-10}$ C/m³ (parte grigia in figura). Nel punto C(8,0) è presente una carica puntiforme $Q = 3 \cdot 10^{-9}$ C. Calcolare il valore del campo elettrico nel punto B(6,0).

Soluzione:

Applicando il teorema di Gauss su una superficie sferica S concentrica con la sfera dielettrica e di raggio r_B = 6 m (passante quindi per B), si ottiene il campo elettrico perpendicolare a tale superficie (diretto quindi come $\vec{a}_x$ B):

$$\iint_S \varepsilon_0 \vec{E}_S \vec{n}\, dS = Q_{in} = \iiint_V \rho\, dV \Rightarrow \varepsilon_0 4\pi r_B^2 E_S = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \vec{E}_S = \frac{\rho R^3}{\varepsilon_0 3 r_B^2} \vec{a}_x = 6.7\, \vec{a}_x$$

V/m

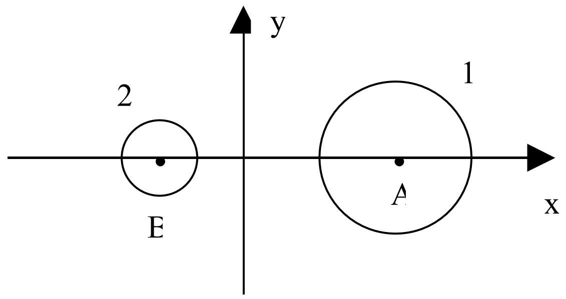
Il contributo della carica puntiforme posta in C è pari a:

$$\vec{E}_Q = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 CB^2} \vec{a}_x = -6.75\, \vec{a}_x \text{ V/m}$$

Nel punto B, il campo totale è dato dalla sovrapposizione degli effetti:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_S + \vec{E}_Q = 6.7\, \vec{a}_x - 6.75\, \vec{a}_x = -0.05\, \vec{a}_x$$

Esercizio 2



Siano dati due cilindri conduttori 1 e 2 (di raggio rispettivamente r_1 = 1 m e r_2 = 0.5 m), i cui assi, paralleli ad $\vec{a}_z$, passano rispettivamente per i punti A(2,0) e B(-1,0) come in figura (coordinate dei punti in metri). Il cilindro 1 è percorso da una densità di corrente costante pari a $\vec{J}_1 = 2 \cdot \vec{a}_z$ A/m^2 mentre il cilindro 2 è percorso da una densità di corrente che decresce con la distanza r dal centro del cilindro (punto B) pari a $\vec{J}_2 = \frac{J_B}{r} \vec{a}_z$ A/m^2 per $0 < r < r_2$. Determinare:

1) il verso che deve avere la densità corrente $\vec{J}_2$ (ossia il segno di J_B) perché si abbia campo magnetico nullo nell'origine degli assi cartesiani (giustificare la risposta);
2) calcolare il valore di J_B perché si abbia campo magnetico nullo nell'origine degli assi cartesiani, verificando così la risposta al punto 1.

Soluzione:
1) Per avere un campo magnetico nullo nell'origine degli assi, è necessario che in tale punto si sommino vettori con pari intensità e verso opposto: ciò può accadere solo se la corrente del conduttore 2 scorre in direzione $\vec{a}_z$ (linee di forza dei campi determinati dalla regola della mano destra).

2) E' necessario innanzitutto calcolare la corrente totale che scorre nei due cilindri conduttori, integrando le densità di corrente:

$$I_1 = \iint_S \vec{J}_1 \, d\vec{S} = \int_0^{r_1} 2 \; 2\pi \; r \, dr = 2 \; r_1^2 \, \pi = 2\pi \quad \text{A}$$

$$I_2 = \iint_S \vec{J}_2 \, d\vec{S} = \int_0^{r_2} \frac{J_B}{r} \, 2\pi \; r \, dr = 2\pi \int_0^{r_2} J_B \, dr = 2\pi \; J_B \, r_2 = \pi \; J_B \quad \text{A}$$

Da cui si hanno i due campi magnetici:

$$\vec{H}_1 = -\frac{I_1}{2\pi |x_A|} \vec{a}_y = -0.5 \, \vec{a}_y \quad \text{A/m}$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I_2}{2\pi |x_B|} \vec{a}_y = 0.5 \; J_B \, \vec{a}_y \quad \text{A/m}$$

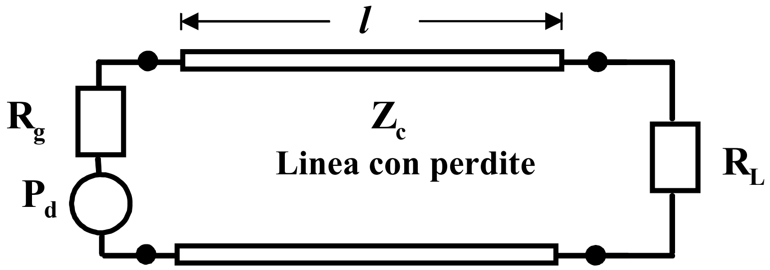
Nell'origine degli assi il campo magnetico totale è dato dalla sovrapposizione dei campi magnetici generati dai due conduttori cilindrici (come detto, stessa direzione, ma verso opposto). Si ottiene quindi:

$$|\vec{H}_{tot}| = |\vec{H}_1| + |\vec{H}_2| = -0.5 + 0.5 \; J_B = 0 \;\Rightarrow\; J_B = 1 \quad \text{A/m}$$

Quindi: $\vec{J}_2 = \frac{1}{r} \vec{a}_z$ A/m^2 per $0 < r < r_2$

Esercizio 3

Sia dato un generatore avente frequenza di 300 MHz, impedenza interna $R_g = 75\ \Omega$ e potenza disponibile $P_d = 20$W, collegato ad un carico $R_L = 50\ \Omega$ attraverso una linea di trasmissione con perdite, avente impedenza caratteristica 50 Ω, , costante di attenuazione 20 dB/km e lunghezza $l = 100$ m (vedi figura). Si calcoli la potenza dissipata sul carico R_L.



Soluzione:

Essendoci adattamento fra carico e linea, l'impedenza di ingresso alla sezione del generatore è pari a R_L:

$$Z_{in} = Z_C = R_L = 50\ \Omega$$

Il coefficiente di riflessione alla sezione del generatore vale dunque:

$$\Gamma_g = \frac{R_L - R_g}{R_L + R_g} = -0.2$$

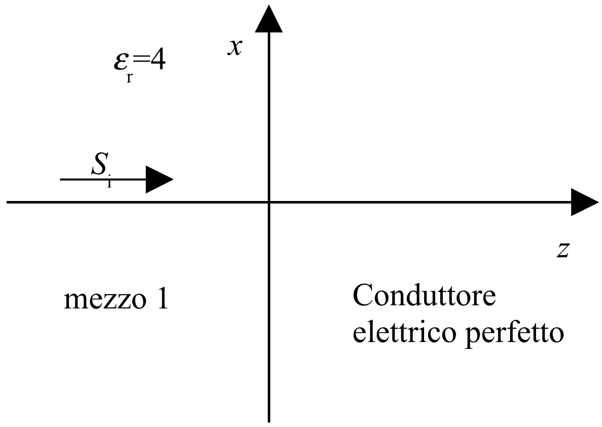
Considerando quindi la riflessione alla sezione del generatore e tenendo conto dell'attenuazione introdotta dalla linea ($\alpha = 2.3 \cdot 10^{-3}$ Np/m), si può ricavare la potenza dissipata sul carico come:

$$P_L = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) e^{-2\alpha l} \approx 12.1 \text{ W}$$

Esercizio 4

Un'onda piana alla frequenza di 600 MHz proviene da un mezzo con ε_r=4 (trasportando una densità di potenza S_i pari a 10 mW/m^2), e incide ortogonalmente sulla superficie di separazione con un conduttore elettrico perfetto. Calcolare il modulo del campo elettrico per:

a) x=0, z=-0.5 m
b) x=0, z= -0.25 m
c) x=0, z=+0.25 m (all'interno del conduttore perfetto)



Soluzione:

La lunghezza d'onda nel mezzo dielettrico vale:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = 0.25 \text{ m}$$

Il conduttore perfetto corrisponde a un corto circuito nell'equivalenza onde-linee di trasmissione, per cui la sua impedenza intrinseca vale $\eta = 0$ Ω. Il coefficiente di riflessione alla sezione fra i due mezzi vale dunque $\Gamma = -1$. Nel mezzo dielettrico si ha quindi riflessione totale e un'onda stazionaria (onda progressiva + onda regressiva): si ottiene un minimo di campo elettrico totale ($\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 0$ V/m) sulla superficie del conduttore (come deve essere per le condizioni al contorno) e per distanze multiple di $\lambda/2$ dalla superficie. Quindi, sia per z = -0.25 m = -λ, sia per z = -0.5 m =-2λ, si ha campo elettrico totale nullo. Infine, per z = 0.25 m, si ha ancora campo elettrico nullo dato che il punto si trova all'interno del conduttore perfetto.

Domande *(sono possibili risposte multiple; alle risposte errate è associato un punteggio negativo)*:
Le risposte esatte sono indicate dai quadratini neri.

5) In un materiale diamagnetico, la permeabilità magnetica relativa è:
   - ☐ maggiore di 1
   - ▪ positiva
   - ☐ negativa
   - ▪ positiva e inferiore a 1
   - ☐ nulla

6) Il modulo del coefficiente di riflessione alla sezione di ingresso di una linea di trasmissione (molto lunga e con perdite) collegata ad un carico è pari ad 1, allora:
   - ☐ il carico è sicuramente adattato alla linea
   - ☐ il carico è sicuramente un corto circuito
   - ☐ il carico è sicuramente un circuito aperto
   - ▪ il caso è impossibile
   - ☐ il carico è immaginario

7) L'espressione $\vec{E}(y,t) = A\cos(\omega t - \beta y)\vec{a}_x$ rappresenta il campo elettrico di un'onda piana che:
   - ☐ si propaga in direzione *x* in un mezzo con perdite
   - ☐ si propaga in direzione *y* in un mezzo con perdite
   - ▪ si propaga in direzione *y* in un mezzo senza perdite
   - ☐ ha campo magnetico diretto come *y*
   - ▪ ha campo magnetico diretto come *z*

8) Una spira elettrica posta sul piano (*x*,*y*) è immersa in un campo magnetico in direzione *z* costante nel tempo e nello spazio; la spira è percorsa da corrente elettrica se:
   - ☐ la spira trasla parallela a se stessa sul piano (*x*,*y*)
   - ☐ mai
   - ☐ la spira non si muove
   - ☐ la spira ruota intorno all'asse *z*
   - ▪ la spira ruota intorno all'asse *x*

9) Dato un generatore adattato ad una linea chiusa su un carico reale disadattato, posso aumentare la potenza dissipata sul carico se:
   - ☐ aumento la lunghezza della linea
   - ☐ aumento le perdite della linea
   - ☐ aggiungo una parte reattiva all'impedenza del carico
   - ▪ modifico la parte reale dell'impedenza del carico
   - ☐ inserisco un cortocircuito in parallelo al carico