

**Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva**  
**Appello del 21 luglio 2008**

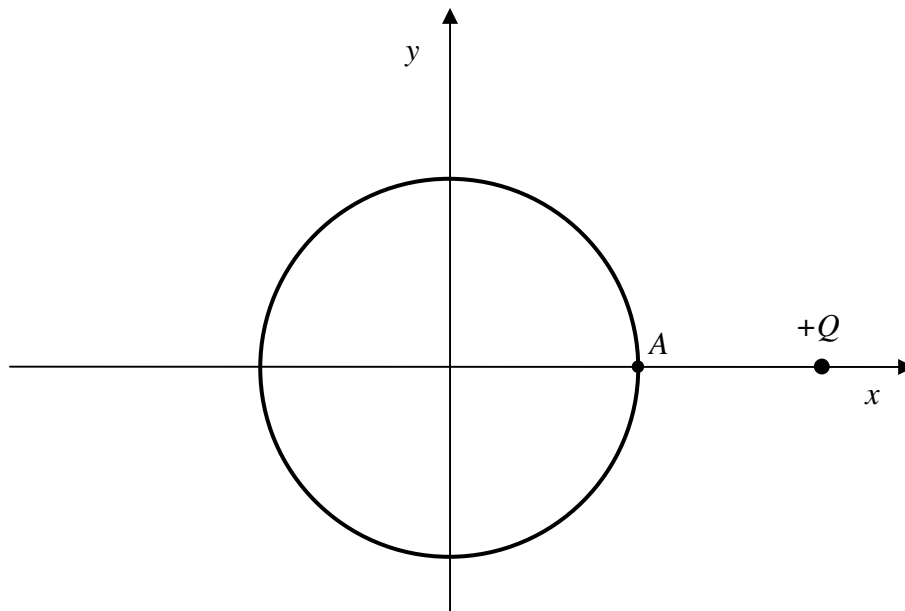
1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA \_\_\_\_\_

**Esercizio 1**

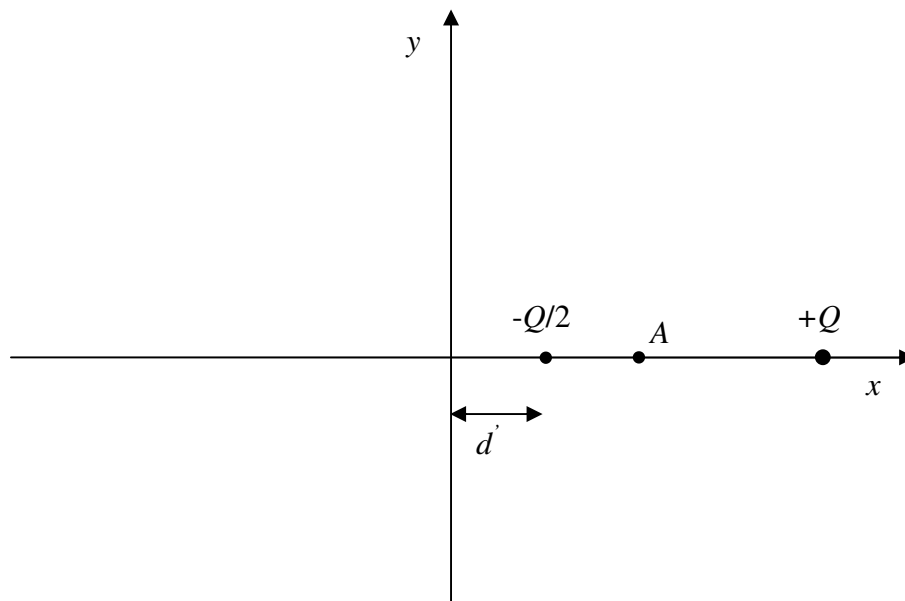


Ad una sfera conduttrice a potenziale nullo (collegata a terra) nel vuoto, viene avvicinata una carica  $+Q$  ( $Q = 2\pi \cdot 10^{-9}$  C) nel punto di coordinate (0.4,0) (vedi figura). Calcolare:

- a. il valore della densità di carica indotta nel punto A(0.2,0);
- b. la totale carica indotta sulla sfera.

**Soluzione:**

Applicando il metodo delle cariche immagine,  $+Q$  induce sulla sfera una carica il cui effetto può essere rappresentato da una carica immagine  $Q' = -QR/d = -Q/2 = -\pi \cdot 10^{-9}$  C posta sul semiasse  $+x$  a distanza  $d' = R^2/d = 0.1$  m dall'origine degli assi. La sfera è quindi sostituita dalla carica immagine posta come nella seguente figura:

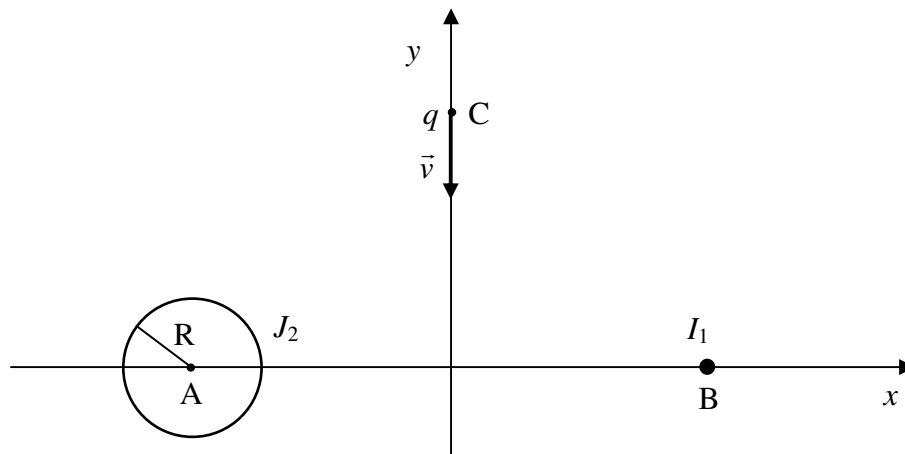


Il calcolo della densità di carica indotta sulla sfera nel punto A passa attraverso il calcolo del campo elettrico normale alla superficie della sfera:  $\sigma = D_n = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_x$ . Il campo elettrico generato da entrambe le cariche in A è diretto come  $-\vec{\mu}_x$ :

$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 0.2^2} - \frac{Q/2}{4\pi\epsilon_0 0.1^2} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_x = -\frac{Q}{4\pi 0.2^2} - \frac{Q/2}{4\pi 0.1^2} = -\frac{10^{-9}}{0.2^2 2} - \frac{10^{-9}}{0.1^2 4} = -3.75 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2.$$

La carica totale indotta sulla sfera è pari a  $-Q/2$ .

## Esercizio 2



Un filo di lunghezza indefinita, posto in B(0.5 m, 0 m) è attraversato da una corrente  $I_1$  di intensità 2.1 mA che scorre in direzione  $-\vec{\mu}_z$ . Un cilindro conduttore di lunghezza indefinita, il cui centro è posto in A(-0.5 m, 0 m), è attraversato da una densità di corrente, il cui valore dipende dalla distanza dal centro del cilindro  $r$  secondo la legge  $\vec{J}_2 = r\vec{\mu}_z$  A/m<sup>2</sup> per  $0 < r < R$  ( $R = 0.1$  m è il raggio della sezione del cilindro). Determinare:

- il campo magnetico totale nel punto C(0 m, 0.5 m);
- la forza a cui è sottoposto un elettrone (di carica  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C) che si trova nel punto C e che viaggia con velocità  $\vec{v} = -2\vec{\mu}_y$  m/s.

### Soluzione:

#### Punto a.

Il campo totale in C è dato dalla sovrapposizione degli effetti dovuti ai conduttori percorsi da corrente. Il modulo del campo  $H_1$  in C vale:

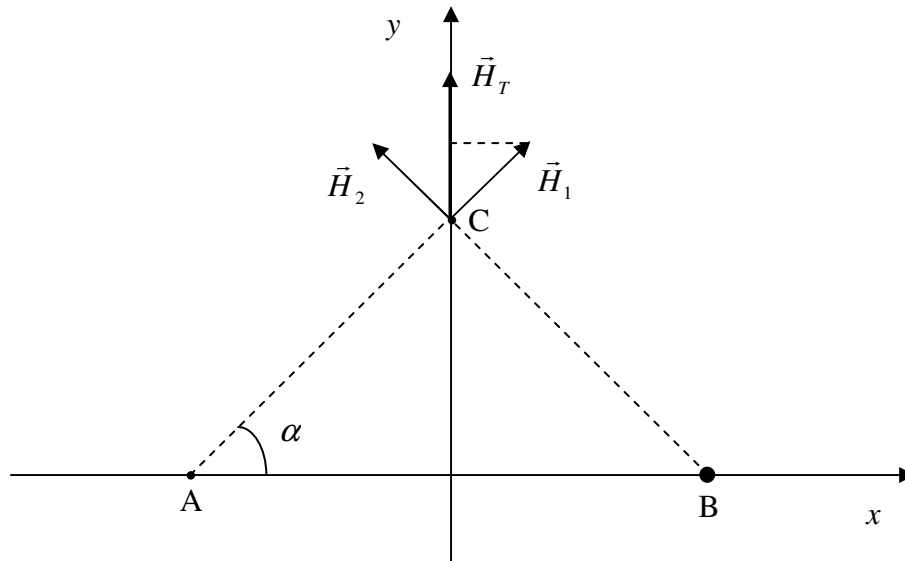
$$|\vec{H}_1| = \frac{I_1}{2\pi BC} = \frac{2.1 \cdot 10^{-3}}{2\pi 0.5\sqrt{2}} = 4.73 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}$$

$$\text{La corrente } I_2 \text{ vale: } I_2 = \int_S \vec{J}_2 d\vec{S} = \int_0^R r \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\pi R^3 = 2.1 \text{ mA}$$

Il modulo del campo  $H_2$  in C vale:

$$|\vec{H}_2| = \frac{I_2}{2\pi AC} = 4.73 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}$$

I moduli dei due campi sono uguali dato che le correnti totali che scorrono nei conduttori sono uguali e  $BC = AC$ . La seguente figura mostra le direzioni dei campi magnetici, determinate considerando il verso delle correnti e usando la regola della mano destra.



Dato che i moduli dei campi sono uguali e considerando che l'angolo  $\alpha$  vale  $45^\circ$  (dalla geometria del problema), il campo magnetico totale risultante vale:

$$\vec{H}_T = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = 2|\vec{H}_1|\cos(\alpha)\vec{\mu}_z = \sqrt{2}|\vec{H}_1|\vec{\mu}_z = \sqrt{2}|\vec{H}_1|\vec{\mu}_z = 6.69 \cdot 10^{-4} \vec{\mu}_z \text{ A/m}$$

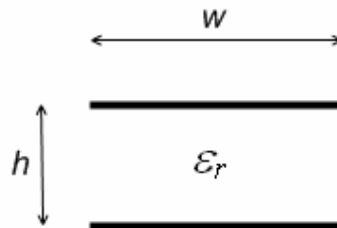
#### Punto b.

L'elettrone è soggetto alla forza di Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Dato che i due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo, così come la forza  $\vec{F}$ .

### Esercizio 3

Data la linea a striscia mostrata in figura (sezione trasversale), e trascurando gli effetti di bordo si calcoli:

- 1) il valore del rapporto  $w/h$  considerando note l'impedenza caratteristica  $Z_C = 47 \, \Omega$  e la velocità di propagazione  $v = 1.5 \cdot 10^8 \, \text{m/s}$  ( $\mu_r = 1$ );
- 2) il valore di  $h$  e della costante di fase considerando  $w = 20 \, \text{mm}$  e  $f = 350 \, \text{MHz}$ ;
- 3) la costante di attenuazione in dB/Km dovuta alle perdite di conduzione nel dielettrico ( $\sigma_d = 10^{-4} \, \text{S/m}$ ).



### Soluzione:

Per questa struttura, la capacità e l'induttanza valgono:

$$C = \epsilon \frac{w}{h}$$

$$L = \mu \frac{h}{w}$$

da cui si deriva l'espressione dell'impedenza caratteristica e della velocità di fase:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{w}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Dalla seconda espressione, si ricava il valore della permittività dielettrica relativa:  $\sqrt{\epsilon_r} = \frac{c}{v\sqrt{\mu_r}} = 2 \Rightarrow \epsilon_r = 4$ . Dalla prima espressione si ricava

invece:  $\frac{h}{w} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} Z_C = 0.2495$ . Conoscendo poi  $w$ , si ottiene anche  $h$ :  $h = w \cdot 0.2495 = 5 \, \text{mm}$ . La

costante di fase vale:  $\beta = \omega/v = 14.66 \, \text{rad/m}$ .

In questa struttura le perdite sono dovute al dielettrico imperfetto (la conducibilità non è nulla).

L'attenuazione dovuta al dielettrico, causata dalla corrente che attraversa il dielettrico stesso, è:

$$\alpha_d = \frac{g}{2Y_C}$$

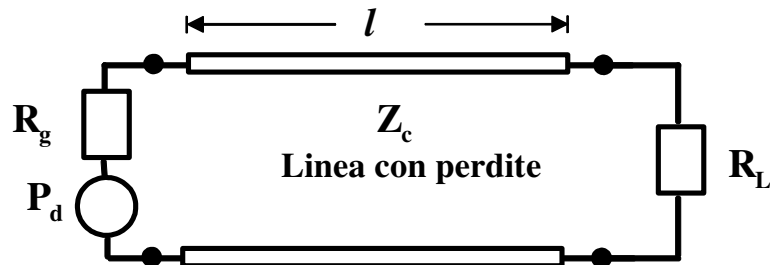
dove  $Y_C$  è l'ammettenza caratteristica e  $g$ , l'ammettenza per unità di lunghezza, vale, per questa struttura:

$$g = \sigma_d \frac{w}{h} = 4 \cdot 10^{-4} \, \text{S/m}$$

Si ottiene dunque  $\alpha_d = 0.0094 \, \text{Np/m} = 81.65 \, \text{dB/km}$ .

#### Esercizio 4

Sia dato un generatore avente frequenza di 300 MHz, impedenza interna  $R_g=75\ \Omega$  e potenza disponibile  $P_d=10\text{W}$ , collegato ad un carico  $R_L=50\ \Omega$  attraverso una linea di trasmissione con perdite, avente impedenza caratteristica  $50\ \Omega$ , costante di attenuazione 20 dB/km e lunghezza  $l=80\text{ m}$  (vedi figura). Si calcoli la potenza dissipata sulla linea.



#### Soluzione:

Essendo il carico adattato alla linea ( $R_L = Z_C = 50\ \Omega$ ), l'impedenza vista alla sezione del generatore (sezione AA) vale  $Z_{AA} = 50\ \Omega$ . La potenza che attraversa la sezione AA e viene ceduta sia alla linea che al carico  $R_L$  è:

$$P_{AA} = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 9.6\text{ W}$$

$$\text{dove } \Gamma_g = \frac{Z_{AA} - R_G}{Z_{AA} + R_G} = -0.2.$$

La potenza che arriva alla sezione del carico (e viene totalmente assorbita perché  $R_L = Z_C$ ) dipende dalle perdite della linea e vale ( $\alpha = 20\text{ dB/km} = 0.0023\text{ Np/m}$ ):

$$P_L = P_{AA} e^{-2\alpha l} = 6.64\text{ W}$$

La potenza dissipata sulla linea è data dalla differenza della potenza che passa la sezione AA e la potenza assorbita dal carico:

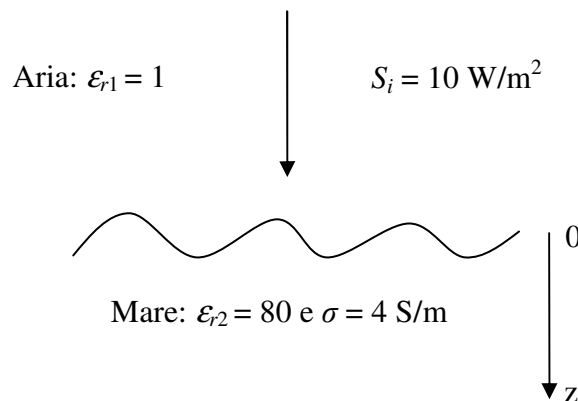
$$P_{diss} = P_{AA} - P_L = 2.96\text{ W}$$

### Esercizio 5

A un'onda piana uniforme trasmessa da una HAP (High Altitude Platform) posta a 20 km di altitudine è associata una densità di potenza  $S_i = 10 \text{ W/m}^2$ . L'onda, che si propaga in aria ( $\epsilon_{r1} = 1$ ) alla frequenza  $f = 500 \text{ kHz}$ , incide sulla superficie del mare ( $\epsilon_{r2} = 80$  e conducibilità  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ ), come mostrato in figura. Determinare:

- la velocità di propagazione dell'onda nel mare;
- la lunghezza d'onda nel mare;
- la distanza dalla superficie del mare  $z_2$  per cui il modulo del campo elettrico vale  $10 \text{ } \mu\text{V/m}$ .

*Suggerimento: calcolare la tangente di perdita per valutare le approssimazioni possibili.*



### Soluzione:

Per rispondere al punto a) e b) è necessario conoscere la costante di fase  $\beta$ . Dato che il mezzo 2, il mare, è un mezzo con perdite, il calcolo di  $\beta$  passa attraverso il calcolo di  $\gamma$ :

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma + j\omega\epsilon_2)}$$

È possibile tuttavia applicare le approssimazioni per buoni conduttori, dato che  $\sigma/(\omega\epsilon_2) \approx 1798 \gg 1$ . Si ottiene dunque:

$$\alpha_2 = \beta_2 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma}{2}} = 2.81 \text{ 1/m}$$

Per confronto con il risultato ottenuto, il calcolo di  $\gamma_2$  secondo la formula esatta fornisce  $\gamma_2 = 2.8091 + j2.8107 \text{ 1/m}$ .

La velocità di propagazione dell'onda è dunque:

$$v_2 = \frac{\omega}{\beta_2} = 1.1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 2.24 \text{ m}$$

Per quanto riguarda il punto c, è necessario calcolare il coefficiente di trasmissione dell'onda:

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$\eta_1 = \eta_0 = 377 \text{ } \Omega$ , mentre  $\eta_2$ , sempre considerando l'approssimazione per buoni conduttori, vale:

$$\eta_2 \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{2\sigma}}(1+j) = 0.7 + j0.7 \, \Omega$$

Per confronto con il risultato ottenuto, il calcolo di  $\eta_2$  secondo la formula esatta fornisce

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma + j\omega\epsilon_2}} = 0.7027 + j0.7023 \, \Omega$$

Il coefficiente di trasmissione vale dunque  $T = 0.0037 + j0.0037$ .

L'espressione del modulo del campo elettrico nel mezzo 2 è:

$$|E_2(z_2)| = |E_i(0)T \exp(-j\beta_2 z_2) \exp(-\alpha_2 z_2)| = |E_i(0)||T| \exp(-\alpha_2 z_2)$$

Il valore di  $|E_i(0)|$ , il modulo del campo elettrico incidente sulla superficie aria/mare, si ricava dalla densità di potenza trasportata dall'onda incidente (dato che il mezzo 1 è senza perdite, il modulo del campo elettrico è sempre lo stesso in ogni punto del mezzo 1):

$$S_i = \frac{1}{2} \frac{|E_i|^2}{\eta_1} \Rightarrow |E_i| = |E_i(0)| = \sqrt{2S_i\eta_1} = 86.8 \, \text{V/m}$$

Invertendo la formula precedente si ottiene:

$$z_2 = \frac{1}{\alpha_2} \ln \left( \frac{|E_i(0)||T|}{|E_2(z_2)|} \right) = 3.8 \, \text{m}$$

avendo considerato  $|E_2(z_2)| = 10 \, \mu\text{V/m}$ .