Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 8 luglio 2008

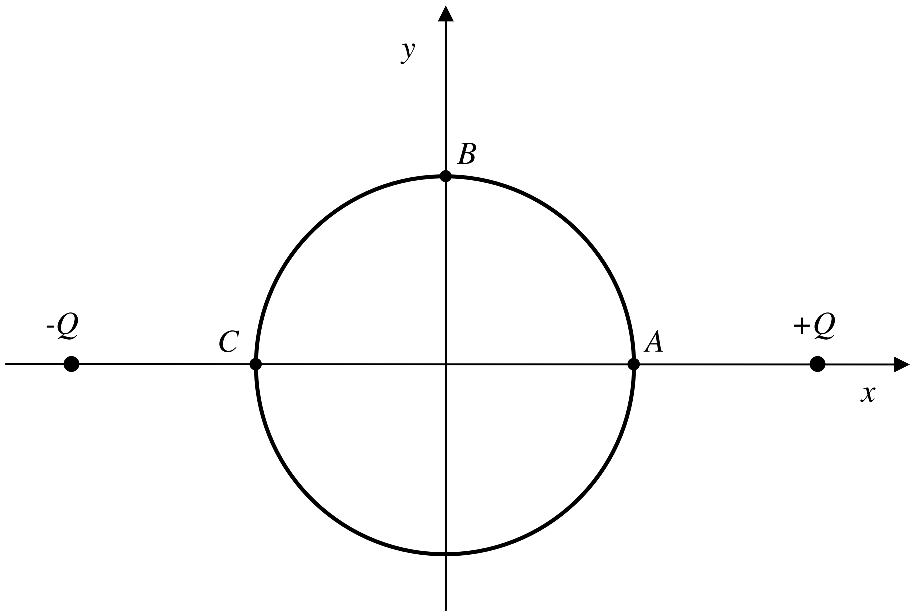
1	2	3	4	5	6	7	8	9

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

Esercizio 1



Ad una sfera conduttrice isolata (di raggio R=0.2 m) ed elettricamente neutra (carica totale nulla), vengono avvicinate due cariche $+Q$ e $-Q$ ($Q = 4\pi \cdot 10^{-9}$ C) nei punti di coordinate (0.4,0) e (-0.4,0) rispettivamente (vedi figura). Calcolare:

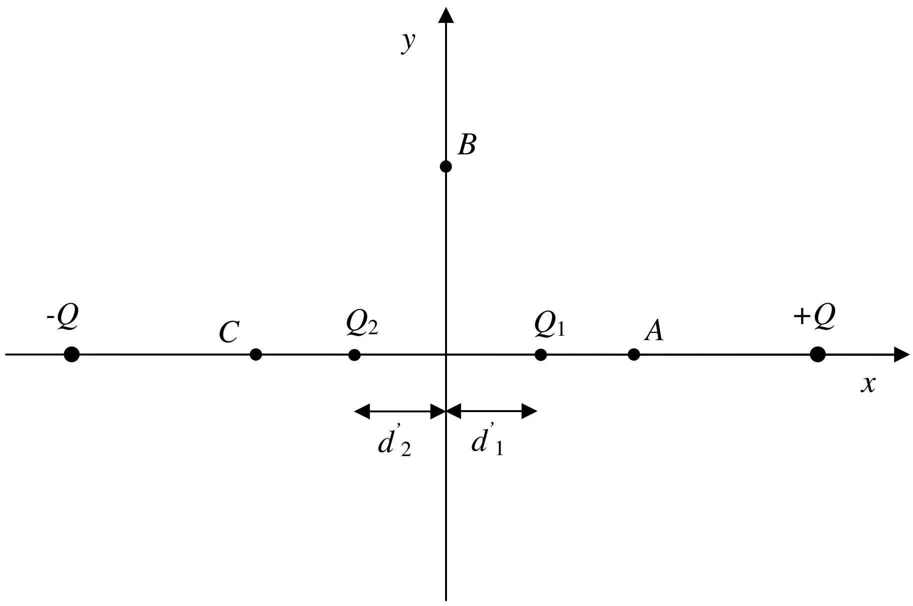
a. il valore del potenziale elettrico (assumendo che sia nullo il potenziale all'infinito) nei punti A(0.2,0), B(0,0.2), e C(-0.2,0);
b. la totale carica indotta sulla sfera.

Suggerimento: si sfruttino i risultati già ottenuti con il metodo della cariche immagine.

Soluzione:

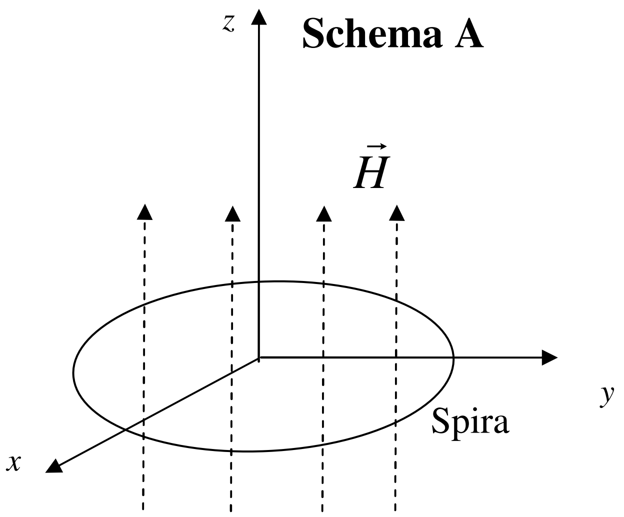
Poiché la sfera conduttrice è elettricamente neutra e isolata, la totale carica indotta su di essa è nulla. Inoltre il potenziale sulla superficie esterna deve essere costante (quindi il potenziale dei punti A, B e C è lo stesso).

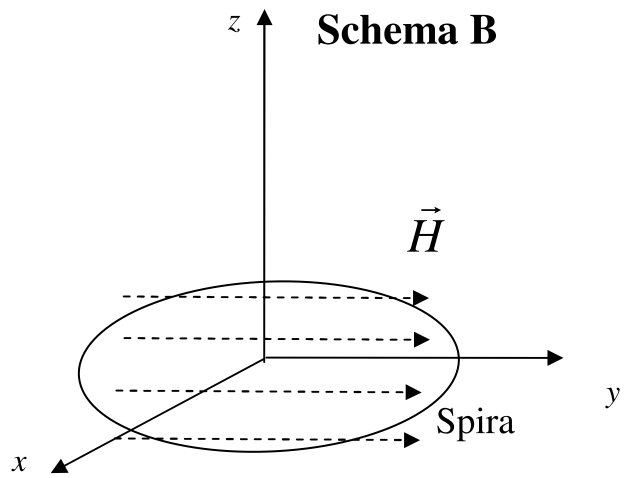
Applicando il metodo delle cariche immagine, +Q induce sulla sfera una carica il cui effetto può essere rappresentato da una carica immagine $Q_1 = -QR/d = -Q/2 = -2\pi \cdot 10^{-9}$ C posta sul semiasse +x a distanza $d_1^{'} = R^2/d = 0.1$ m dall'origine degli assi. Analogamente, -Q induce una carica $Q_2 = -(-QR/d) = Q/2 = 2\pi \cdot 10^{-9}$ C posta sul semiasse -x a distanza $d_2^{'} = R^2/d = 0.1$ m dall'origine degli assi. Non è necessario introdurre alcuna altra carica nel centro della sfera in quanto la carica indotta sulla sfera nulla. La sfera è quindi sostituita dalle cariche immagini poste come nella seguente figura:



Il valore del potenziale sulla superficie della sfera è quindi nullo in quanto le coppie (+Q, Q_1) e (-Q, Q_2) generano un potenziale nullo su di essa.

Esercizio 2





Una spira metallica circolare di raggio r = <u>10</u> cm è posta sul piano xy (il suo centro coincide con l'origine degli assi) ed è immersa in un campo magnetico uniforme in tutto lo spazio. Determinare:

1) il modulo della tensione sulla spira nel caso in cui il campo sia $\vec{H} = 3\vec{\mu}_z$ A/m (schema A);
2) il modulo della tensione sulla spira nel caso in cui il campo sia $\vec{H} = 3\cos(2\pi 10^3 t)\vec{\mu}_z$ A/m (schema A);
3) il modulo della tensione sulla spira nel caso in cui il campo sia $\vec{H} = 3\cos(2\pi 10^3 t)\vec{\mu}_y$ A/m (schema B).

Soluzione:

Perché si induca una tensione sulla spira, è necessaria una variazione nel tempo del flusso magnetico attraverso la spira metallica. Per lo <u>schema A</u>, il campo magnetico e la normale alla spira sono tra loro paralleli; in questo caso il flusso vale (S indica la superficie della spira):

$$\phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = \mu_0 H \int_S dS = \mu_0 H\, r^2 \pi \quad \text{Wb}$$

Il modulo della tensione indotta sulla spira vale:

$$|V| = \left| -\frac{\partial \phi(\vec{B})}{\partial t} \right| = \frac{\partial(\mu_0 H\, r^2 \pi)}{\partial t} = \mu_0 r^2 \pi \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{V}$$

Quindi per il caso 1 si ottiene:

$$\phi(\vec{B}) = \mu_0 H\, r^2 \pi = 1{,}18 \cdot 10^{-7} \quad \text{Wb}$$

da cui: $|V| = 0$ V, dato che il flusso non dipende in questo caso dal tempo.

Per il caso 2 si ottiene invece:

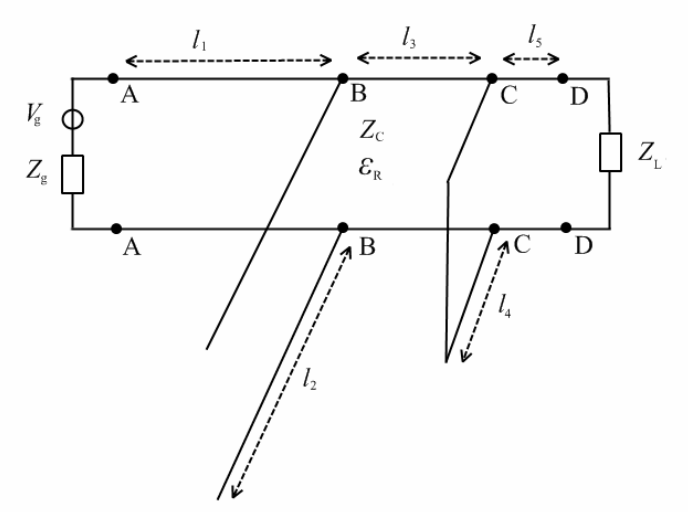
$$\phi(\vec{B}) = \mu_0 H\, r^2 \pi = 1{,}18 \cdot 10^{-7} \cos(2\pi 10^3 t) \quad \text{Wb}$$

da cui: $|V| = 1{,}18 \cdot 10^{-7} (2\pi 10^3) \sin(2\pi 10^3 t) = 7{,}4 \cdot 10^{-4} \sin(2\pi 10^3 t)$ V

Per lo <u>schema B</u>, la normale alla spira e il campo magnetico sono perpendicolari, il che rende nullo il flusso $\phi(\vec{B})$. Per il caso 3 dunque: $|V| = 0$ V.

Esercizio 3

Sia dato il circuito in figura, operante ad una frequenza di 100 MHz. Si determini la potenza dissipata sul carico Z_L.



$Z_g = 150\ \Omega$
$Z_C = 50\ \Omega$
$Z_L = 50 + j\ 100\ \Omega$
$V_g = 20$ V
$\varepsilon_r = 9$
$l_1 = 3{,}8$ m
$l_2 = 1{,}375$ m
$l_3 = 0{,}5$ m
$l_4 = 0{,}125$ m
$l_5 = 0{,}25$ m

Soluzione:

Per conoscere la potenza dissipata sul carico, è necessario riportare il carico stesso alla sezione AA. La lunghezza d'onda vale $\lambda = c/\left(f\sqrt{\varepsilon_R}\right) = 1$ m. Le lunghezze normalizzate alla lunghezza d'onda valgono $\bar{l}_1 = l_1/\lambda = 3{,}8 = 3{,}5 + 0{,}3$, $\bar{l}_2 = l_2/\lambda = 1{,}375 = 1 + 0{,}375$, $\bar{l}_3 = l_3/\lambda = 0{,}5 = 1/2$, $\bar{l}_4 = l_4/\lambda = 0{,}125 = 1/8$, $\bar{l}_5 = l_5/\lambda = 0{,}25 = 1/4$. Dato che l_5 è un tratto $\lambda/4$, il carico Z_L riportato alla sezione CC vale $Z_{CC1} = Z_C^2/Z_L = 10 - j20$ Ω. Il C.C. riportato alla sezione CC vale Z_{CC2} = j50 Ω. Sommando le ammettenze in parallelo alla sezione CC si ottiene: $Y_{CC} = 1/Z_{CC1} + 1/Z_{CC2} = 0.02 + j0.02$ S, ossia $Z_{CC} = 1/Y_{CC} = 25 - j25$ Ω. Dato che l_3 è un tratto $\lambda/2$ (giro completo sulla carta di Smith), il carico Z_{CC} riportato alla sezione BB vale $Z_{BB1} = Z_{CC}$ = 25-j25 Ω. Il C.A. portato alla sezione BB vale Z_{BB2} = j50 Ω. Sommando le ammettenze in parallelo alla sezione BB si ottiene: $Y_{BB} = 1/Z_{BB1} + 1/Z_{BB2} = 0.02$ S, ossia $Z_{BB} = 1/Y_{BB} = 50$ Ω. Dato che il carico alla sezione BB è uguale all'impedenza caratteristica della linea (centro della carta di Smith), il carico Z_{BB} riportato alla sezione AA vale $Z_{AA} = Z_{BB} = 50$ Ω.

E' possibile a questo punto calcolare il coefficiente di riflessione alla sezione del generatore AA:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} = \frac{50 - 150}{50 + 150} = -0.5$$

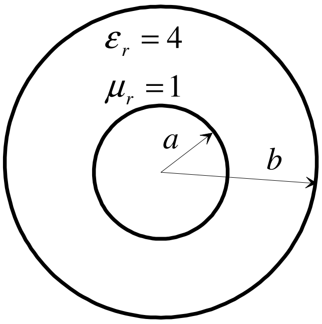
La potenza che passa la sezione AA vale:

$$P_{AA} = P_d\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = \frac{\left|V_g\right|^2}{8\,\mathrm{Re}(Z_g)}\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = 0{,}25\ \text{W}$$

Tale potenza è anche quella assorbita dalla parte reale del carico Z_L, dato che la linea non presenta perdite.

Esercizio 4

Data la linea coassiale in figura (ε_r=4, μ_r=1, b = 3 mm, Z_c=50 Ω), si calcoli l'attenuazione espressa in dB/km dovuta alle perdite nei conduttori (σ=5 10^7 S/m) alla frequenza di 500 MHz;



Soluzione:

L'attenuazione dovuta alla conducibilità finita dei conduttori vale:

$$\alpha = \frac{r}{2Z_C} \quad \text{Np/m}$$

dove r è la resistenza per unità di lunghezza e Z_C è l'impedenza caratteristica della linea. Per una linea coassiale, la capacità per unità di lunghezza vale:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad \text{F/m}$$

mentre l'induttanza L può essere ricavata dalla relazione $LC = \varepsilon\mu$. L'impedenza caratteristica della linea vale dunque:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a) \quad \Omega$$

Da questa relazione si può ricavare il valore di a:

$$\ln(b/a) = \frac{Z_C 2\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = 1{,}6678 \qquad \Rightarrow \qquad b/a = e^{1{,}6678} = 5{,}3 \qquad \Rightarrow \qquad a = b/5{,}3 = 0{,}566 \text{ mm}$$

La resistenza per unità di lunghezza vale:

$$r = \frac{1}{\sigma\delta\, p} \quad \Omega/\text{m}$$

dove lo spessore di penetrazione δ vale:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 3{,}18 \ \mu\text{m}$$

mentre p è la misura del perimetro della sezione del conduttore. Nel caso del coassiale quindi r vale:

$$r = \frac{1}{\sigma\delta\, 2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2{,}1 \quad \Omega/\text{m}$$

L'attenuazione vale dunque:

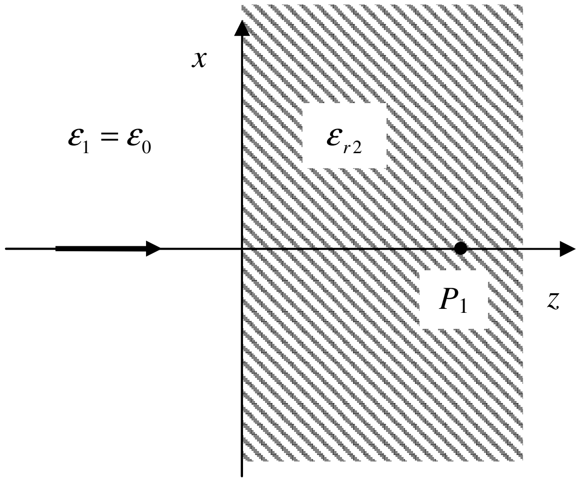
$$\alpha = \frac{r}{2Z_C} = 0{,}021 \text{ Np/m} = 21 \text{ Np/km} = 21\ 8{,}686 \text{ dB/km} = 182{,}4 \text{ dB/km}$$

Esercizio 5

Un'onda piana uniforme alla frequenza di 200 MHz si propaga nel vuoto e ha associata una densità di potenza pari a 0.7 W/m^2. Essa incide perpendicolarmente su un semispazio dielettrico (privo di perdite). A 5 metri dalla superficie di separazione tra i due dielettrici, nel secondo semispazio (punto P_1 in figura) il modulo del campo elettrico vale 17.8 V/m.

Sapendo che il campo elettrico incidente è diretto lungo l'asse y (uscente dal piano del foglio) e il suo fasore è reale nell'origine, si calcoli:

a. il valore di ε_{r2}
b. l'espressione del campo elettrico e magnetico totale (modulo e fase) in P_1
c. l'espressione del campo elettrico e magnetico totale (modulo e fase) in P_2, a 5 metri dalla superficie di separazione tra i due dielettrici, nel primo semispazio



Soluzione:

Il coefficiente di trasmissione vale:

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\eta_0 / \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\eta_0 / \sqrt{\varepsilon_{r2}} + \eta_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \qquad \text{da cui} \quad \sqrt{\varepsilon_{r2}} = \frac{2 - T}{T}$$

Il modulo del campo incidente sulla discontinuità si può ricavare dalle densità di potenza incidente:

$$P_1^i = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_1^i\right|}{\eta_1} \qquad \text{da cui} \quad \left|\vec{E}_1^i\right| = \sqrt{2\eta_1 P_1^i} = 22{,}97 \ \text{V/m e nell'origine degli assi: } \vec{E}_1^i(0) = 22{,}97\vec{\mu}_y$$

Il modulo del campo trasmesso nel P_1 in assenza di perdite vale:

$\left|\vec{E}_2^t\right| = \left|\vec{E}_1^i\right|\left|T\right|$,da cu $\left|T\right| = \dfrac{\left|\vec{E}_2^t\right|}{\left|\vec{E}_1^i\right|} = 0{,}7749$, da cui $T = 0{,}7749$ (unica soluzione fisica) e $\Gamma = T - 1 = -0{,}2251$.

Si ottiene dunque:

$\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 1{,}5809$, da cui $\varepsilon_{r2} = 2.5$.

Il campo elettrico totale nel punto P1 vale (solo campo progressivo):

$$\vec{E}_2^t(z) = \vec{E}_2^t(0)e^{-j\beta_2 z} = \vec{E}_1^i(0)T\, e^{-j\beta_2 z} \ \text{ V/m}$$

Per il secondo mezzo si ottiene: $\beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} = 6{,}63$ rad/m con $z = 5$ m. Si ottiene dunque:

$$\vec{E}_2^t(z=5) = (\text{- }2.7\text{ - j}17.6)\vec{\mu}_y \ \text{ V/m}$$

Il campo magnetico nel punto P_1 vale (dividendo per η_2 e tenendo conto che la direzione del campo magnetico è $-\vec{\mu}_x$ poiché l'onda si propaga in direzione z):

$$\vec{H}_2^{\,t}(z=5) = -(-0.011 - \mathrm{j}0.074)\vec{\mu}_x \quad \text{A/m}$$

Per quanto riguarda il punto P_2, si considera il coefficiente di riflessione Γ. L'espressione del campo elettrico totale in P_2 è ($\beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = \beta_0 = 4{,}2$ rad/m, con z = -5 m):

$$\vec{E}_1(z=-5) = \vec{E}_1^i + \vec{E}_1^r = \vec{E}_1^i(0)e^{-j\beta_1 z} + \Gamma\vec{E}_1^i(0)e^{j\beta_1 z} = (-9.12 + \mathrm{j}24.17)\vec{\mu}_y \quad \text{V/m}$$

Per il campo magnetico totale in P_2 si ha (dividendo questa volta per $\eta_1 = \eta_0$):

$$\vec{H}_1(z=-5) = -\frac{E_1^i}{\eta_1}\vec{\mu}_x + \frac{E_1^r}{\eta_1}\vec{\mu}_x = (0.038 - \mathrm{j}0.041)\vec{\mu}_x \quad \text{A/m}$$