Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 17 luglio 2009

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

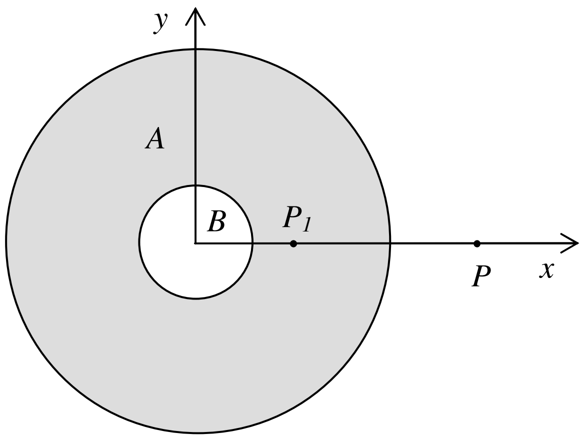
MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1

Sia data la distribuzione di carica volumetrica in figura con densità di carica ρ_V=+10^{-11} C/m^3 nella regione *A* (sfera <u>cava</u> di raggio *a*=20 cm) e ρ_V=-10^{-11} C/m^3 nella regione *B* (sfera di raggio *b*=5 cm).

a) si calcoli il vettore campo elettrico nel punto *P*(*x*=50 cm, *y*=0);
b) si evidenzino le differenze nella soluzione (senza nessun calcolo) nel caso in cui il centro della sfera *B* sia nel punto P_1(*x*=10 cm, *y*=0)



Soluzione:

a) La carica totale Q_A è data dall'integrale della densità di carica sul volume occupato V_A. V_A è pari alla differenza tra i volumi della sfera *A* e della sfera *B*, quindi:

Q_A = + ρv V_A = 3.29 10^{-13} C

Q_B = - ρv V_B = -5.24 10^{-15} C

da cui il vettore campo elettrico risulta $E_x = \dfrac{(3.29-0.0524)10^{-13}}{4\pi\varepsilon_0 (0.5)^2} = 0.0117 \dfrac{V}{m}$

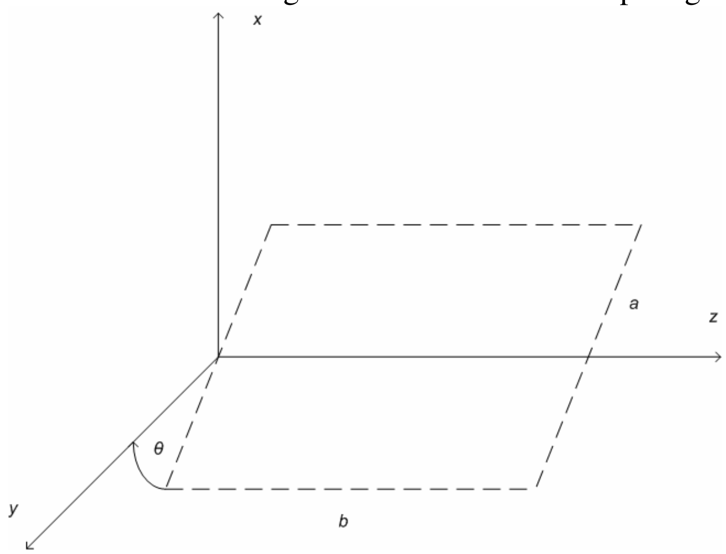
b) In questo caso non è possibile applicare direttamente il teorema di Gauss al problema in quanto la disposizione di cariche non è simmetrica. Il problema viene risolto tramite la sovrapposizione degli effetti in *P*: si sommano il contributo della sfera piena di raggio *a* e densità **+ρ_V** e il secondo contributo della sfera di raggio *b* centrata in *P1* con densità -2 **ρ_V**.

Esercizio 2

Sia data una spira rettangolare di dimensioni a = 10 cm e b = 40 cm posta come in figura, immersa in un campo magnetico $\overline{B} = \left(2\hat{a}_x + 2\sqrt{3}\hat{a}_y\right)\cos(kz)$.

a) Si calcoli il valore del flusso magnetico concatenato quando la spira è nelle seguenti posizioni: $\theta = 0°$, $60°$ e $k = 2\pi / 50b$

b) per quale valore minimo di k il flusso magnetico concatenato è sempre uguale a 0? Giustificare.



Soluzione:

a) Il calcolo del flusso magnetico concatenato deve tenere in considerazione la componente di campo normale alla superficie della spira, come imposto dal prodotto scalare $\phi = \int_S \overline{B} \cdot \hat{a}_n dS$.

Il campo magnetico B varia lungo z, utilizzando il numero d'onda k specificato si nota come la variazione nella lunghezza della spira b sia molto piccola: per $z = b$ vale $B(z) = B_0 \cos(0.1254) = B_0 0.992$. E' possibile quindi considerare il campo come costante nella spira. Quindi

$\theta = 0$: si considera la sola componente del campo B lungo le x: $\phi = 2 \cdot 0.04 = 0.08$ Wb.

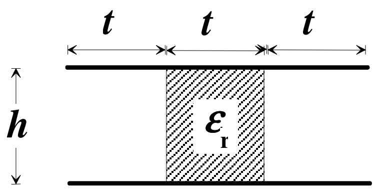
$\theta = 60$: il piano a cui appartiene la spira è normale al campo B, da cui $\phi = 4 \cdot 0.04 = 0.16$ Wb.

b) Il flusso risulta nullo per $k\, b = \pi$, da cui $k = \pi/b$.

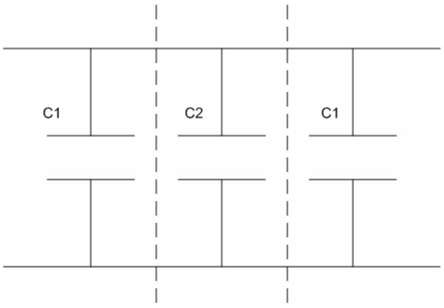
Esercizio 3

Si consideri la linea di trasmissione di cui in figura si mostra la sezione trasversa, costituita da due strisce metalliche sostenute da un dielettrico con $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ e $\sigma_d = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{S/m}$. Trascurando l'effetto di bordo e posto h = 1 mm, calcolare:

a) il valore della lunghezza t affinché l'impedenza caratteristica della linea sia pari a 60 Ω;
b) l'attenuazione in dB/km dovuta alle perdite nel dielettrico (si ricordi che il dielettrico non occupa tutta la sezione della linea).



Soluzione:



a) $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 t}{h}$, $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r t}{h}$, $\quad l = \dfrac{\mu_0 h}{3t}$

$$C_{tot} = 2C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 t}{h}(2+4) = 6\frac{\varepsilon_0 t}{h}$$

$Z_c = \sqrt{\dfrac{l}{C}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0 h h}{3t6\varepsilon_0 t}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\dfrac{h}{t}\dfrac{1}{\sqrt{18}} = 60\Omega$ (imposto dal problema), da cui $t = \dfrac{120\pi}{\sqrt{18}}\dfrac{h}{60} = 1.48$ mm

b)

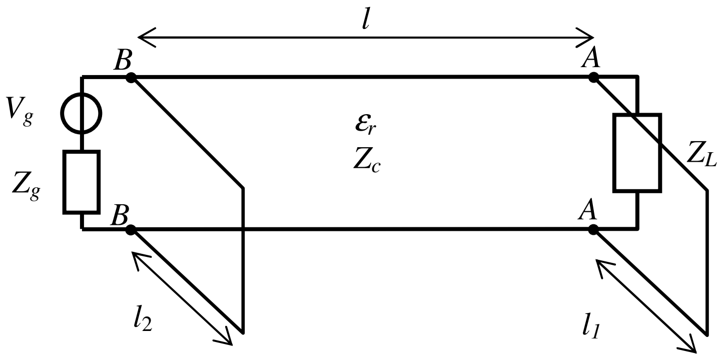
$$\alpha = \sigma \frac{t}{h}\frac{Z_c}{2} = 0.022\frac{Np}{m} = 193\frac{dB}{Km}$$

Esercizio 4

Data la linea di trasmissione in figura (tutte le linee hanno impedenza caratteristica Z_c=50 Ω e ε_r=1), calcolare:

a) la potenza dissipata sul carico Z_L se l_2=62.5 cm;

b) la potenza dissipata sul carico Z_L se l_2=75.0 cm.



f = 600 MHz
V_g = 100 V
Z_g = 50 Ω
Z_L = 100 Ω
Z_c = 50 Ω
ε_r = 1
l = 90 cm
l_1 = 12.5 cm

Soluzione:

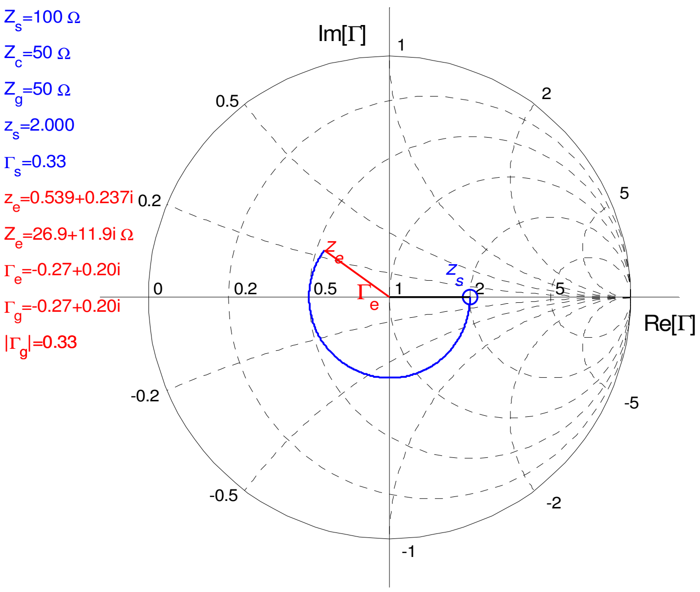
$$\lambda = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r} f} = 0.5 \text{ m}$$

$$\bar{l} = l/\lambda = 1.8 = 1.5 + 0.3$$

$$\bar{l}_1 = l_1/\lambda = 1/4$$

Lo stub di lunghezza l_1 è come se ci non fosse perché si comporta come un circuito aperto in parallelo.

$$\bar{Z}_A = Z_L/50 = 2$$



$\bar{Z}'_B = 0.54 + j0.24$ e quindi $Z'_B = \bar{Z}' \cdot Z_c = (27 + j12)\,\Omega$

a)

$\bar{l}_2 = l_2/\lambda = 1.25 = 1 + 0.25 = 1 + 1/4$

Lo stub di lunghezza l_2 è come se ci non fosse perché si comporta come un circuito aperto in parallelo.

$Z_B = Z'_B$

$\Gamma_g = \dfrac{Z_B - Z_g}{Z_B + Z_g} =$ -0.23 + j0.12 $\qquad \left|\Gamma_g\right| = 0.33$

$P_d = \dfrac{\left|V_g\right|^2}{8Z_g} = 25$ W

$P_L = P_d\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = 22.3$ W

b)

$\bar{l}_2 = l_2/\lambda = 1.5$

Lo stub di lunghezza l_2 si comporta come un corto circuito in parallelo.

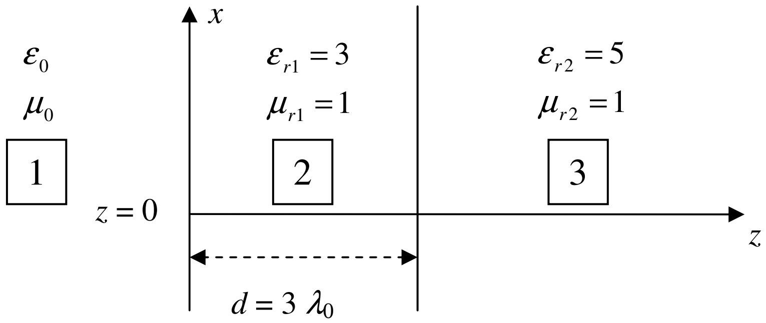
$Z_B = 0$

$\left|\Gamma_g\right| = 1$

$P_L = 0$

Esercizio 5

Un'onda elettromagnetica alla frequenza di 2 GHz incide perpendicolarmente sulla struttura dielettrica multistrato riportata in figura. Il valore del modulo del campo elettrico incidente in z = 0 è $\left|\vec{E}_i(z=0)\right| = 10\vec{a}_x$ V/m e lo spessore del mezzo 2 è $d = 3\lambda_0$ (λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto). Si calcoli la densità di potenza trasmessa nel mezzo 3.



Soluzione:

$\eta_1 = \eta_0 = 377\ \Omega$ $\qquad \eta_2 = \eta_0 / \sqrt{\varepsilon_{r2}} = 217.7\ \Omega$ $\qquad \eta_3 = \eta_0 / \sqrt{\varepsilon_{r3}} = 168.6\ \Omega$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = 0.087 \text{ m}$$

$$\bar{d} = d/\lambda_2 = \frac{3\lambda_0}{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = 3\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 5.196 = 5 + 0.196$$

Usando la carta di Smith (rotazione di 0.196):

$\bar{\eta}_3(z=d) = \eta_3/\eta_2 = 0.775 \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta}_3(z=0) = 1.202 + j0.195 \quad \Rightarrow \quad \eta_3(z=0) = 261.7 + j42.4\ \Omega$

La potenza trasmessa al mezzo 3 si calcola come:

$$P_3 = S_i\left(1 - |\Gamma|^2\right) = 0.128 \text{ W/m}^2 \text{ con } S_i = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_i(z=0)\right|^2}{\eta_1} = 0.133 \text{ W/m}^2 \text{ e}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_3(z=0) - \eta_1}{\eta_3(z=0) + \eta_1} = \text{-}0.175 + \text{j}\,0.078$$