Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 3 settembre 2009

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ______________________________

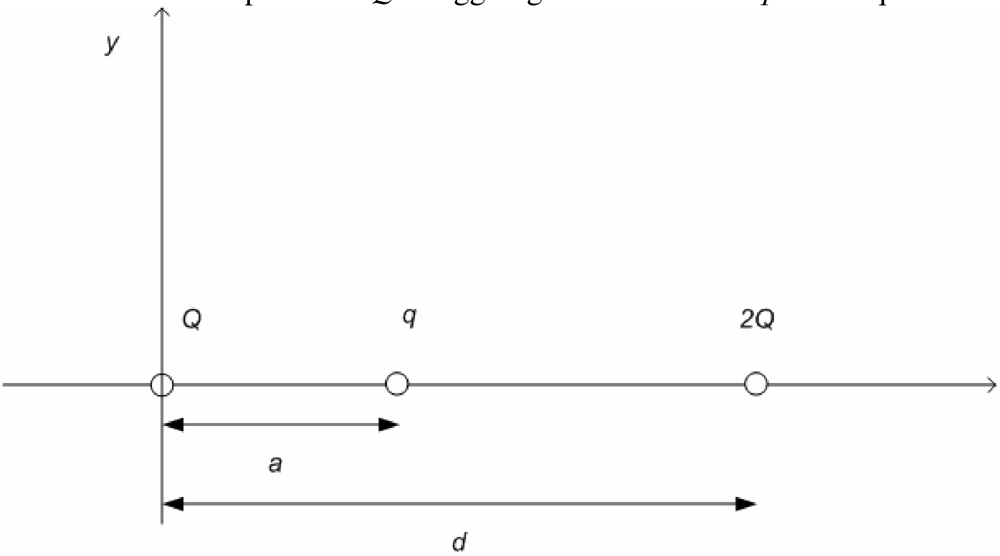
MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1

Sono date due cariche puntiformi in figura Q e q entrambe positive, separate da una distanza a nota. Calcolare:

a) il vettore forza agente su q (dovuto solo a Q);
b) la posizione d della carica positiva $2Q$ da aggiungere in modo che q sia in equilibrio.



Soluzione:

a) $F_q = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} q \; \vec{a}_x$

b) $F_{Q,q} = F_{2Q,q} \Rightarrow \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} q = \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 (d-a)^2} q$; con le opportune semplificazioni

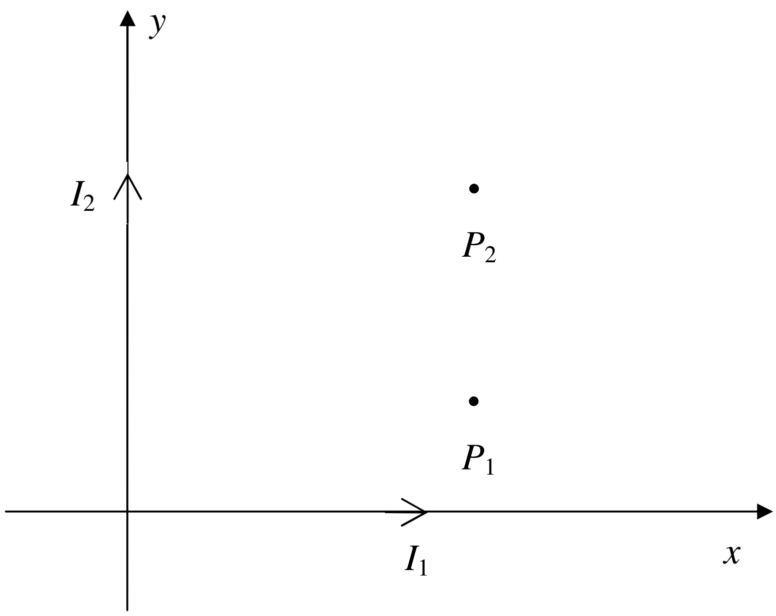
$d = a \pm \sqrt{2}a \Rightarrow d = a(1+\sqrt{2})$

Esercizio 2

Dati i due fili nel vuoto (μ=μ_0) in figura percorsi dalle correnti I_1=I_2=1 A, calcolare:

a) il vettore densità di flusso magnetico totale $\vec{B}$ nel punto P_1(3,1);

b) il vettore campo magnetico totale $\vec{H}$ nel punto P_2(3,3).



Soluzione:

a) $\vec{B}_1 = \mu_0 \dfrac{I_1}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \vec{a}_z (\mathrm{T})$

$\vec{B}_2 = \mu_0 \dfrac{I_1}{2\pi 3} = -0.67 \cdot 10^{-7} \vec{a}_z (\mathrm{T})$

$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 1.33 \cdot 10^{-7} \vec{a}_z (\mathrm{T})$

b) Poiché

$\vec{H}_1 = -\vec{H}_2$

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = 0 \qquad (\mathrm{A/m})$

Esercizio 3

Calcolare la costante di propagazione $\gamma = \alpha + j\beta$ di un cavo coassiale con conduttori di rame (σ = 5.9 10^7 S/m) di diametro rispettivamente pari a b = 15 mm e a = 3.5 mm, riempito con un dielettrico avente $\varepsilon_r = 2 - j\,0.02$ (frequenza di operazione f = 1GHz).

Soluzione:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} \quad dove \quad Z = r + j\omega l \quad e \quad Y = g + j\omega c$$

$$r = \frac{1}{\sigma\delta 2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad , dove \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

Si ricava quindi $\delta = 2.07\,10^{-6}$ m $\quad e \quad quindi \quad r = 0.459\ \Omega/\mathrm{m}$

$$g = \frac{\sigma_{eq} 2\pi}{\ln(b/a)} \quad , dove \quad \sigma_{eq} = \omega\varepsilon'' = \omega\varepsilon_0 0.02$$, da cui $g = 7.628 \quad 10^{-4}$ S/m

$$c = \frac{2\pi\varepsilon'}{\ln(b/a)} = 7.628 \quad 10^{-11} \quad \mathrm{F/m}$$

$$l = \frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a) = 2.91 \quad 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

Da qui $Z = 0.459 + j18.28\,10^2$ e $Y = 7.628\,10^{-4} + j0.479$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = 0.027 + j29.59 \quad \left(\mathrm{m}^{-1}\right)$$

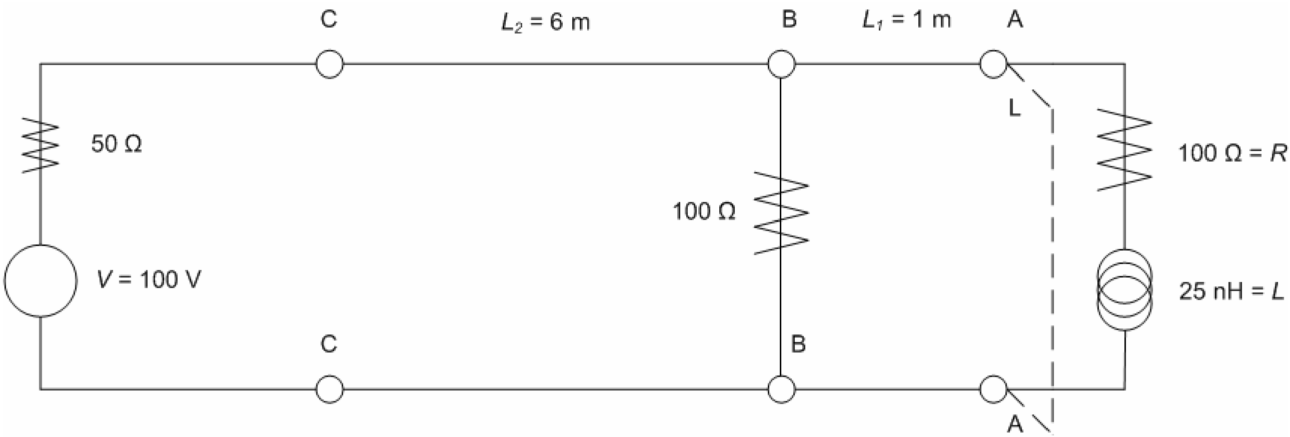
Esercizio 4

Dato il circuito in figura (frequenza f = 300 MHz), nel quale le linee sono cavi coassiali in aria (ε_r = 1) con raggi dei conduttori a = 2 mm e b = 4.6 mm, calcolare:

a) la lunghezza L dello stub in parallelo al carico alla sezione A per neutralizzare la parte reattiva;

b) la totale potenza dissipata sui 2 carichi (senza inserire lo stub);

c) il modulo della tensione alle sezioni A, B, C (dopo l'inserimento dello stub).



Soluzione:

Dai dati forniti si ricava $Z_c = 50\Omega$ e si nota come L_1 ed L_2 siano equivalenti a 1λ.

a) il carico reattivo è pari a $j\omega L = j50 \Rightarrow \overline{Z}_L = 2 + j$. L'ammettenza risulta $\overline{Y}_L = 0.4 - j0.2 \Rightarrow L_{stub} = 0.282\lambda \cong 28\,\text{cm}$

b) la potenza disponibile è pari a $P_{IN} = V_G^{\;2} / 8R_G = 25$ W. Il coefficiente di riflessione alla sezione C è $\Gamma_C = \Gamma_B = \dfrac{Z_{//} - Z_C}{Z_{//} + Z_C} = 0.04 + j0.11 \Rightarrow |\Gamma_B| = 0.117$: la potenza alla trasmessa alla sezione B è $P_T = P_{IN}(1 - |\Gamma_B|^2) = 24.7$ W

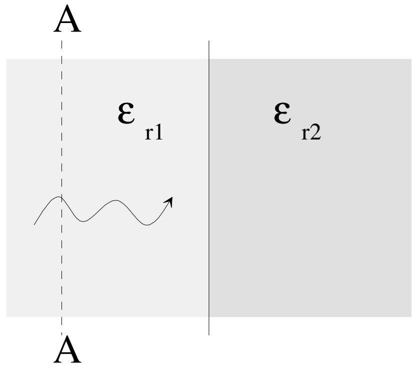
c) Inserendo lo stub si ottiene una impedenza $\dfrac{1}{Y_{AA}} = Z_{AA} = 125\Omega$. Alla sezione BB e anche alla sezione CC si vede un'impedenza data dal parallelo dei due carichi: $Z_{\|} = 55.5\Omega$, il coeff. di rifelssione alla sezione BB è $\Gamma_B = 0.052$. La tensione alle sezione CC e BB si ricava attrverso il partitore sui carichi: $V_{CC} = V_{BB} = V_G \dfrac{Z_{\|}}{R_G + Z_{\|}} = 52.6\,V$. Per calcolare la tensione alla sezione AA occorre sapere la potenza disponibile sui carichi alla sezione BB che vale: $P_B = (1 - |\Gamma_B|^2) = 24.92\,W$. Si valuta poi la potenza che fluisce nei due carichi in parallelo: $P_1 = \dfrac{1}{2}|V_1|^2\ \mathrm{Re}[Y_1], P_2 = \dfrac{1}{2}|V_2|^2\ \mathrm{Re}[Y_{2,B}]$; considerando che $P_B = P_1 + P_2, \quad |V_1| = |V_2|$ si ottiene la tensione alla sezione AA come:

$$P_2 = P_B \frac{\mathrm{Re}[Y_2]}{\mathrm{Re}[Y_1] + \mathrm{Re}[Y_2]} = 24.92 \cdot 0.44 = 10.96W; \quad |V_2| = |V_{AA}| = \sqrt{\frac{2P_2}{\mathrm{Re}[Y_2]}} = 52.62V$$

Esercizio 5

Un'onda piana con frequenza 100 MHz si propaga in un mezzo con costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r1} = 4 - 0.1j$ e alla sezione *A-A* (distante 10 m dalla superficie di discontinuità con il dielettrico $\varepsilon_{r2} = 81$) il modulo del campo elettrico è pari $|E_{iA}|$=10 V/m. Calcolare:

a) il modulo del campo elettrico riflesso alla sezione *A-A;*
b) il ritardo con cui arriva a tale sezione.



Soluzione:

Tangente di perdita: $\tan\phi = \frac{0.1}{4} = 0.025 << 1$

Valgono le approssimazioni dei buoni dieltttrici:

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon'_{r1}} = 4.192 \ \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta \tan\phi}{2} = 0.0524 \ \frac{\text{Np}}{\text{m}}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon'_{r1}}} = 188.4 \ \Omega$$

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{\varepsilon'_{r1}}} = 1.5 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'impedenza intrinseca del mezzo 2 vale:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = 41.86 \ \Omega$$

Il coefficiente di riflessione alla superficie di separazione dei 2 mezzi vale:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.6364$$

Il modulo del campo elettrico riflessione alla sezione A-A vale:

$$|E_{rA}| = |E_{iA}| \, e^{-\alpha_1 10} \, |\Gamma| \, e^{-\alpha_1 10} = 2.23 \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Il ritardo con cui l'onda riflesse arriva alla sezione A-A è pari a:

$$\tau = \frac{20}{v_1} = 0.13 \quad \mu\text{s}$$