Campi Elettromagnetici – Proff. C. Capsoni e C. Riva
Appello del 2 luglio 2009

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME __________________________________

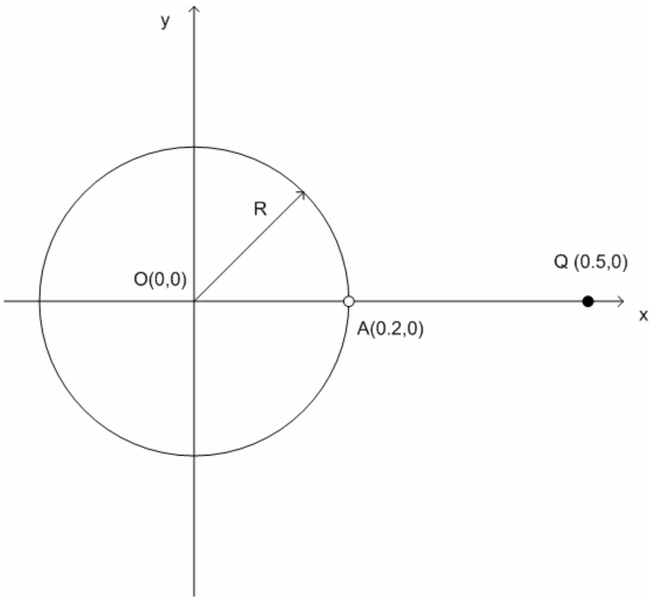
MATRICOLA __________________________________

FIRMA __________________________________

Esercizio 1

E' data una sfera conduttrice di raggio R = 0.2 m ed una carica $Q = 2\pi\ 10^{-10}$ C ad una distanza D=0.5 m dal centro della sfera, disposta come in figura. Calcolare il valore della densità di carica indotta nel punto A(0.2,0) nei due seguenti casi:

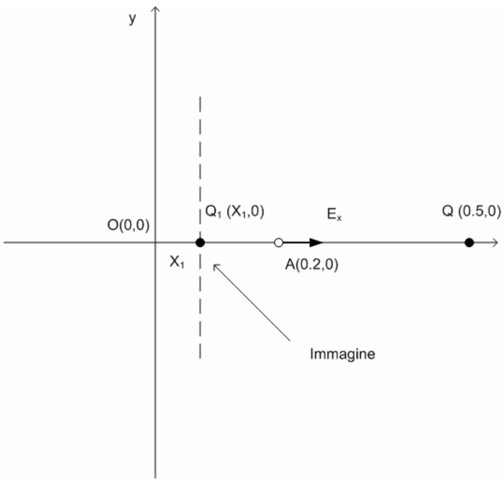
a) sfera conduttrice a massa (potenziale V=0)
b) sfera isolata con carica totale nulla



Soluzione:

La densità di carica sulla sfera in A è data da $\sigma = D_n = \varepsilon_0 E_x$.

a) Sfera conduttrice. Applicando il metodo delle cariche immagini**,** la carica Q induce sulla sfera una carica il cui effetto può essere rappresentato da una carica immagine $Q_1 = -QR/D = -Q\ (0.4) = -(0.4)\ 2\pi\ 10^{-10}$ [C] . Tale carica è localizzata ad una distanza $x_1 = R^2/D = 0.08$ [m] dal centro della sfera come in figura.



Il campo normale E_x è dato dalla composizione dei contributi delle due cariche:

$$E_x = -\ Q/\ 4\pi\varepsilon_0(0.3)^2 + Q_1/4\pi\varepsilon_0(0.12)^2 = -\ 2\pi 10^{-10}/\ 4\pi\varepsilon_0(0.09) - 0.8\pi 10^{-10}\ /4\pi\varepsilon_0(0.0144) = -219.5 \text{ V/m}$$

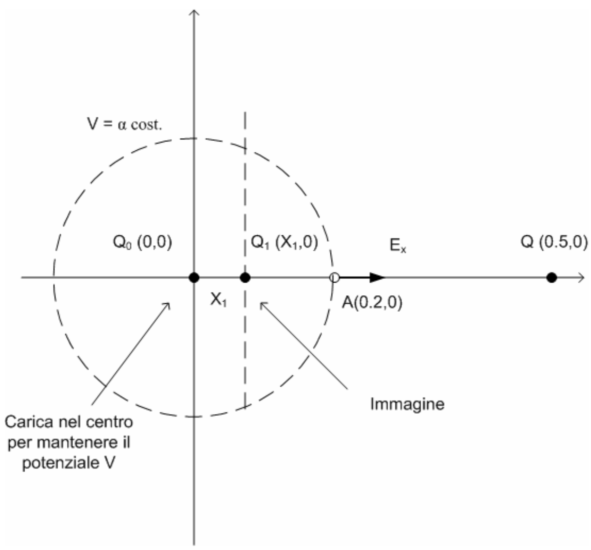
Da cui la densità di carica: $\sigma = \varepsilon_0\ E_x = -1.94\ 10^{-9}\ \text{C/m}^2$

b) Viene specificato che la sfera è isolata, quindi in questo caso le cariche accumulate non vengono scaricate a terra nè richiamate da terra. Inoltre, l'effetto di carica indotta nulla e potenziale costante può essere ottenuto da una seconda carica Q_0 posta nell'origine, tale che $Q_0 + Q_1 = 0$.
Il campo E_x deve quindi tenere conto del contributo positivo di Q_0, da cui:

$$E_x = E_x\ (a) + Q_0\ /\ 4\pi\varepsilon_0(R)^2 = -219.5 + 0.8\pi 10^{-10}\ /4\pi\varepsilon_0(0.04) = -219.5 + 56.4 = -163.1 \text{ V/m}$$

Dove $E_x(a)$ è il campo calcolato al punto a).

La densità di carica è quindi: $\sigma = \varepsilon_0\ E_x = -\ 1.44\ 10^{-9}\ \text{C/m}^2$

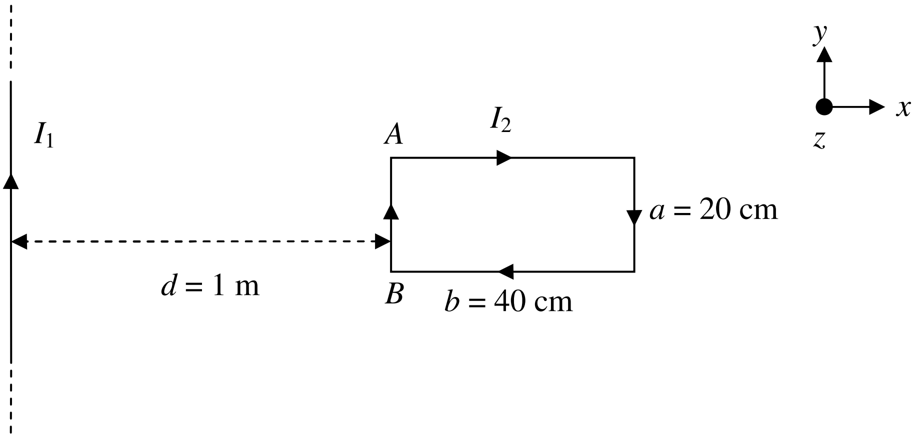


Esercizio 2

Un filo indefinito è percorso da una corrente I_1 che scorre in direzione $\vec{a}_y$ posto a distanza d=1 m da una spira metallica rettangolare in cui scorre una corrente I_2 in senso orario (fare riferimento alla figura sotto). Calcolare:

1) la forza agente sul tratto AB della spira nel caso in cui le correnti I_1=1 A e I_2=0.5 A siano costanti nel tempo (si consideri solo il contributo della corrente che scorre nel filo indefinito);

2) la forza elettromotrice indotta sulla spira nel caso in cui la corrente I_1 vari nel tempo secondo la legge $I_1 = \cos(\omega t)$ A e I_2 sia nulla.



Soluzione:

1) Il campo magnetico generato dal filo indefinito a distanza d = 1 m dal filo stesso vale:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\vec{\mu}_z = -2\cdot 10^{-7}\vec{\mu}_z \text{ [T]}$$

La forza agente sul tratto AB si calcola come:

$$\vec{F} = \int_{-a/2}^{a/2} I_2\, d\vec{l}\times\vec{B} = \int_{-a/2}^{a/2}\left(I_2\, dy\vec{u}_y\right)\times\left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\vec{\mu}_z\right) = \int_{-a/2}^{a/2} -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}dy\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\vec{u}_x\int_{-a/2}^{a/2}dy = -\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi d}\vec{u}_x =$$

$$= -2\cdot 10^{-8}\vec{u}_x \text{ [N]}$$

2) Il flusso di del campo magnetico attraverso la spira vale:

$$\phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S\left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\vec{\mu}_z\right)\cdot\left(-dS\,\vec{\mu}_z\right) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{-a/2}^{-a/2}dy\int_d^{d+b}\frac{1}{x}dx = \frac{a\mu_0 I_1}{2\pi}\ln\left(\frac{d+b}{d}\right) =$$

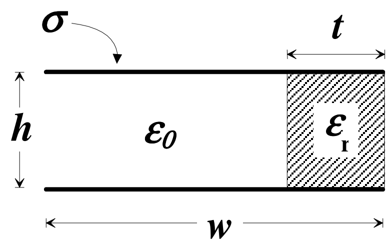
$$= 1.346\cdot 10^{-8}\cos(\omega t) \text{ [Wb]}$$

La forza elettromotrice indotta vale:

$$fem = -\frac{d\phi_m}{dt} = -(-1.346\cdot 10^{-8}\sin(\omega t)) = 1.346\cdot 10^{-8}\,\omega\sin(\omega t) \text{ [V]}$$

Esercizio 3

Data la linea a microstriscia in figura (w=5 cm, t= 2 cm, h= 1 cm), parzialmente riempita con dielettrico con permettività ε_r, calcolare ε_r affinché l'impedenza caratteristica sia pari a 50 Ω. Calcolare, per tale linea, la costante di attenuazione <u>in dB/km</u> alla frequenza di 300 MHz (conduttanza dei conduttori $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$).



Soluzione:

La struttura è composta da 2 conduttori in parallelo:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{w-t}{h} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{t}{h} \qquad C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{h}\left[t(\varepsilon_r - 1) + w\right]$$

L'induttanza vale:

$$L = \mu_0 \frac{h}{w}$$

L'impedenza caratteristica vale:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{h}{\sqrt{w\left[t(\varepsilon_r - 1) + w\right]}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{1}{t}\left[\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{Z_C^2 w} + t - w\right] = 4.18$$

Le perdite dovute al conduttore si calcolano come:

$$r = \frac{2}{\sigma\,\delta\,w} = 0.195\ \Omega/\text{m con } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = 4.11\ \mu\text{m}$$

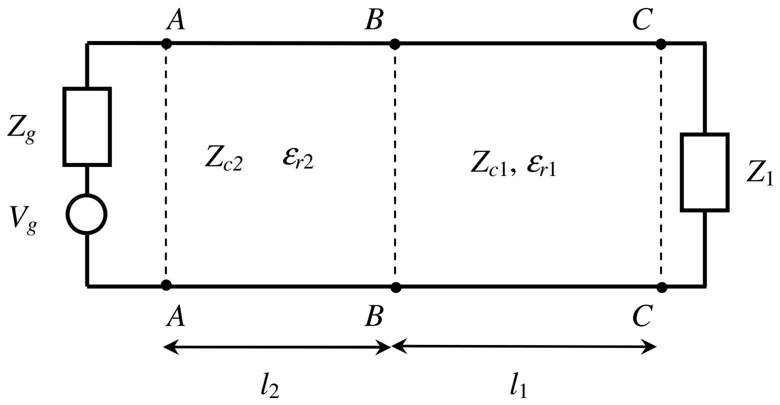
Dunque:

$$\alpha\big|_{Np/m} = \frac{r}{2Z_C} = 0.0019\ \text{Np/m} = 16.9\ \text{dB/km}$$

Esercizio 4

Data la linea di trasmissione in figura operante alla frequenza di 300 MHz, calcolare:

a. la potenza assorbita dal carico Z_1;
b. il modulo della corrente che scorre nel carico Z_1.



$V_g = 100$ V
$Z_g = 100\ \Omega$
$f = 300$ MHz
$Z_1 = 100\ \Omega$
$l_1 = 75.0$ cm
$l_2 = 62.5$ cm
$\varepsilon_{r1} = 1$
$\varepsilon_{r2} = 4$
$Z_{c1} = 50\ [\Omega]$
$Z_{c2} = 100\ [\Omega]$

Soluzione:

$\lambda_1 = \dfrac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = 1$ m e $\lambda_2 = \dfrac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = 0.5$ m

$\overline{Z}_1 = 100 / Z_{C1} = 2$

$\bar{l}_1 = l_1 / \lambda_1 = 0.75 = 0.5 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad$ sezione $\lambda_1/4$

$\overline{Z}_{1B} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad Z_{1B} = 25\ \Omega$

$\overline{Z}_B = Z_{1B} / Z_{C2} = 0.25$

$\bar{l}_2 = l_2 / \lambda_2 = 1.25 = 1 + 0.25 \quad \Rightarrow \quad$ sezione $\lambda_2/4$

$\overline{Z}_A = 4 \quad \Rightarrow \quad Z_A = 400\ \Omega$

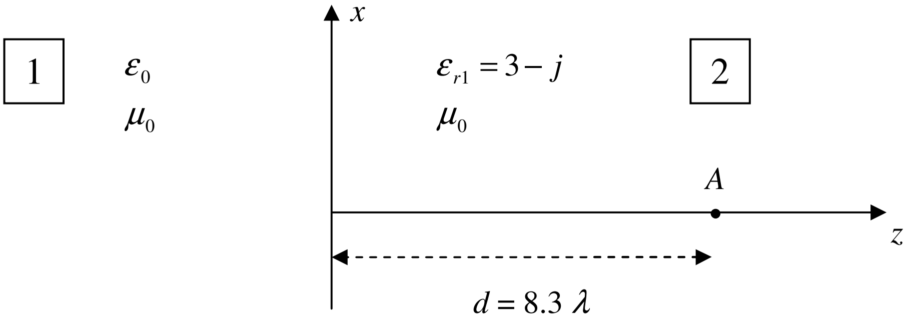
$P_L = P_d\left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 8$ W con $\Gamma_g = \dfrac{Z_A - Z_g}{Z_A + Z_g} = 0.6$

$P_L = \dfrac{1}{2}|I_L| \mathrm{Re}(Z_1) = 8$ W $\quad \Rightarrow \quad |I_L| = \sqrt{\dfrac{2P_L}{\mathrm{Re}(Z_1)}} = 0.4$ A

Esercizio 5

Sia data un'onda elettromagnetica alla frequenza di 300 MHz incidente perpendicolarmente sulla superficie di separazione di due mezzi con caratteristiche riportate in figura. Il valore del campo elettrico associato all'onda incidente è $\vec{E}_i(z=0) = 10\vec{a}_x$ V/m:

a) scrivere le espressioni dei campi elettrico e magnetico nel mezzo 2;
b) calcolare il valore del campo elettrico nel punto A in figura posto a una distanza d = 8.3λ_2 dal piano di separazione tra i due mezzi (λ_2 è la lunghezza d'onda nel mezzo 2).



Soluzione:
Il coefficiente di riflessione vale:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \text{-}0.282 + \text{j}0.074 \quad \text{con} \quad \eta_1 = \eta_0 = 377\ \Omega \text{ e } \eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = 209.1 + j33.9\ \Omega$$

La costante di propagazione nel mezzo 2 vale:

$$\gamma_2 = \sqrt{j\omega\mu_0 j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{r2}} = 1.79 + \text{j}11.03\ \text{1/m} = \alpha_2 + j\beta_2\ \text{1/m}$$

La lunghezza d'onda nel mezzo 2 vale dunque:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 0.5693\ \text{m}$$

L'espressione del campo elettrico nel punto A è:

$$\vec{E}_2(d) = \left|\vec{E}_i(0)\right|(1+\Gamma)\exp(-\gamma_2 d)\vec{\mu}_x = 10(0.718 + \text{j}0.074)\exp[(-\alpha_2 + j\beta_2)8.3\lambda_2]\vec{\mu}_x = (\text{-}0.3 \text{ - j}1.5)\vec{\mu}_x$$

mV/m $\Rightarrow$ $\left|\vec{E}_2(d)\right| = 1.5$ mV/m

Per il campo magnetico in A:

$$\vec{H}_2(d) = \frac{\left|\vec{E}_2(d)\right|}{\eta_2}\vec{\mu}_y = \frac{\left|\vec{E}_i(0)\right|(1+\Gamma)}{\eta_2}\exp(-\gamma_2 d)\vec{\mu}_y = (\text{-}2.6 \text{ - j}6.7)\vec{\mu}_y\ \mu\text{H/m}$$