Fisica dei mezzi trasmissivi – Prof. C. Capsoni
Prova del 31 gennaio 2011

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ____________________

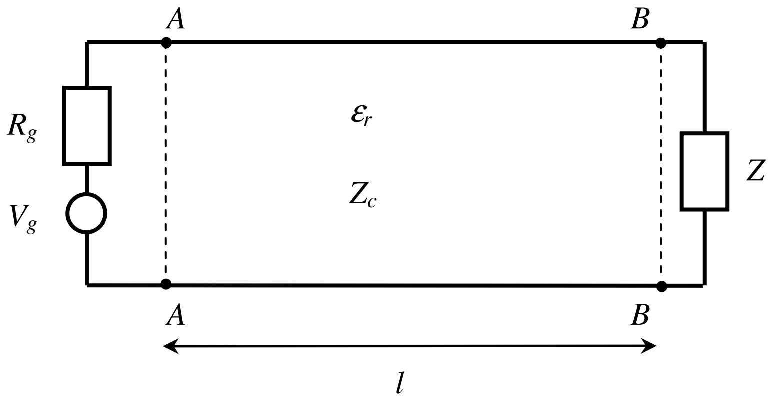
MATRICOLA ____________________

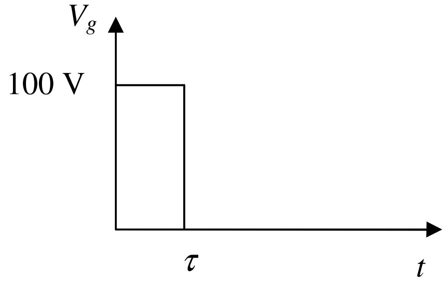
FIRMA ____________________

Esercizio 1

Un generatore, la cui tensione varia nel tempo come indicato in figura, è collegato a un carico Z attraverso una linea di trasmissione senza perdite.

$R_g = 50\ \Omega$
$Z = 200\ \Omega$
$l = 30$ m
$\varepsilon_r = 1$
$Z_c = 50\ \Omega$
$\tau = 10$ ns





Si chiede di:

a) calcolare il coefficiente di riflessione sul carico Z;
b) calcolare il tempo di propagazione del segnale dal generatore al carico;
c) disegnare l'andamento di V_B, la tensione sul carico, per $0 < t < 300$ ns.

Soluzione:

a) Il coefficiente di riflessione sul carico vale:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} = 0.6$$

b) Il tempo di propagazione vale:

$$t_p = \frac{l}{c} = 100 \text{ ns}$$

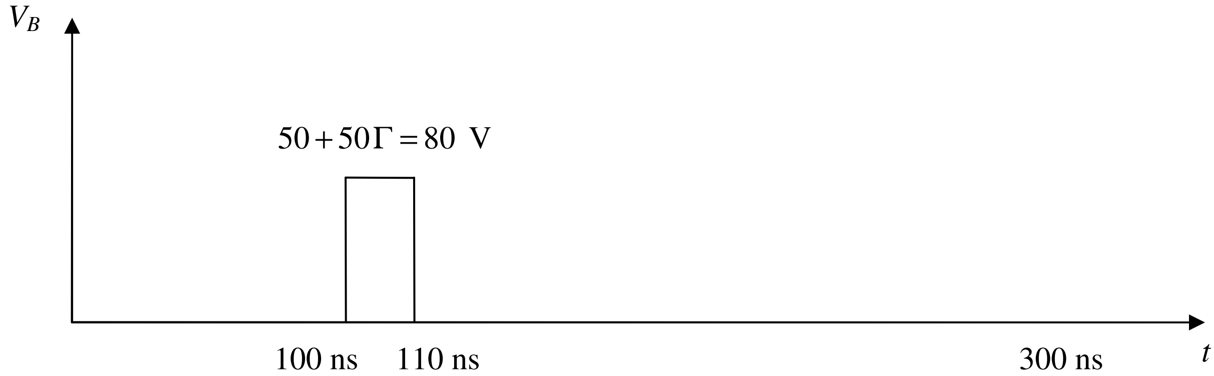
c) Il coefficiente di riflessione (nel tempo) alla sezione AA vale

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_c}{R_g + Z_c} = 0$$

Essendo dunque il generatore adattato alla linea, il segnale verrà riflesso al carico una sola volta perché la sua parte riflessa viene assorbita completamente dal generatore. La tensione alla sezione AA si determina con il partitore di tensione fra R_g e Z_c:

$$V_{AA} = \frac{V_g}{2} = 50 \text{ V} \quad (0 < t < 10 \text{ ns})$$

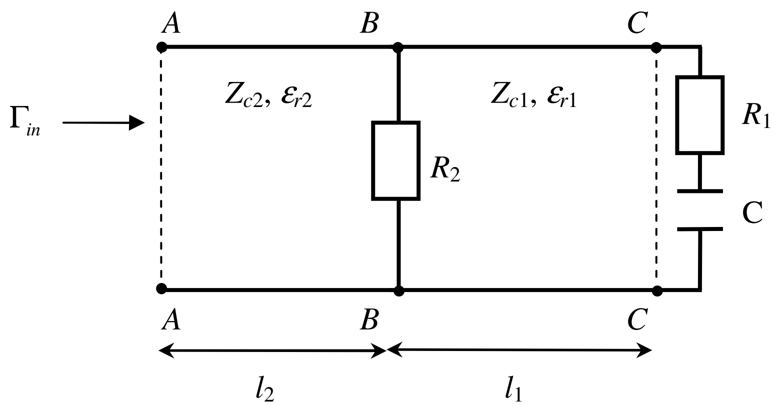
Considerando la sovrapposizione di onda progressiva e regressiva, l'andamento della tensione sul carico sarà dunque il seguente:



Esercizio 2

Si faccia riferimento al circuito indicato in figura (frequenza di operazione f = 600 MHz).

a) Determinare il coefficiente di riflessione (riferito alla linea) in ingresso (sezione AA).
b) Quanto deve valere la resistenza interna di un ipotetico generatore, collegato alla sezione AA, per trasferire ai carichi R_1 e R_2 il massimo della potenza disponibile?



f = 600 MHz
R_1 = 100 Ω
R_2 = 75 Ω
l_1 = 12.5 cm
l_2 = 58 cm
ε_{r1} = 1
ε_{r2} = 4
Z_{c1} = 50 [Ω]
Z_{c2} = 10 [Ω]
C = 6.6315 nF

Soluzione:

Per rispondere alla richiesta del problema è necessario riportare tutto il circuito alla sezione AA utilizzando la carta di Smith. L'impedenza alla sezione CC vale:

$$Z_{1CC} = R_1 + \frac{1}{j\omega C} = 100 - j0.04 \ \Omega$$

La lunghezza d'onda nel tratto di linea BB-CC vale:

$$\lambda_1 = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = 50 \ \text{cm}$$

Da cui si ricava la lunghezza $l1$:

$$\bar{l}_1 = \frac{l_1}{\lambda_1} = 0.25$$

La sezione BB-CC è dunque un $\lambda_1/4$, il che rende semplice riportare il carico dalla sezione CC alla sezione BB:

$$Z_{1BB} = (Z_{c1})^2 / Z_{1CC} = 25 + j0.01 \ \Omega$$

Alla sezione BB i carichi in parallelo si sommano in ammettenza:

$$\frac{1}{Z_{BB}} = \frac{1}{Z_{1BB}} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow Z_{BB} = 18.75 + j0.056 \approx 18.75 \ \Omega$$

Non resta che riportare il carico Z_{BB} alla sezione AA. La lunghezza d'onda su quel tratto di linea vale:

$$\lambda_2 = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = 25 \ \text{cm}$$

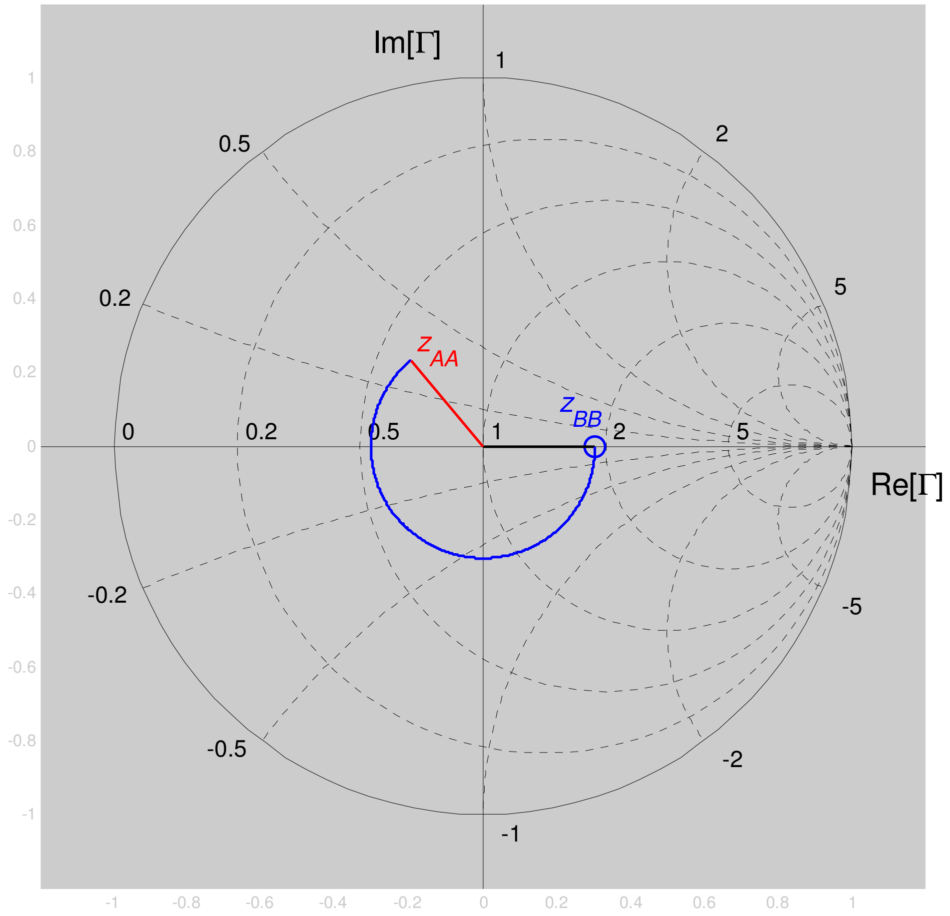
Da cui:

$$\bar{l}_2 = \frac{l_2}{\lambda_2} = 2.32 = 2 + 0.32$$

Il carico normalizzato alla linea vale:

$$\bar{Z}_{BB} = Z_{BB} / Z_{c2} = 1.875$$

Effettuando la rotazione sulla carta di Smith, si ottiene:



$$\bar{Z}_{AA} = 0.612 + j0.314$$

Da cui:

$$Z_{AA} = Z_{in} = \bar{Z}_{AA}\, Z_{c2} = 6.12 + j3.14\ \Omega$$

Il coefficiente di riflessione vale (ricavabile anche dalla carta di Smith):

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{AA} - Z_{c2}}{Z_{AA} + Z_{c2}} = -0.195 + j0.233$$

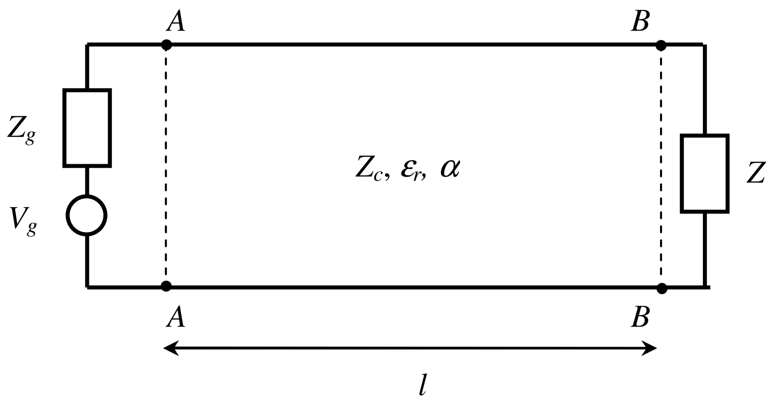
Infine, il massimo trasferimento di potenza si avrebbe con un generatore dotato di impedenza interna pari al complesso e coniugato di Z_{AA}:

$$Z_g = Z_{AA}^* = 61.2 - j3.14\ \Omega$$

Esercizio 3

Sia data una linea con perdite con coefficiente di attenuazione α = 25 dB/km (si veda la figura). Calcolare:

a) la potenza assorbita dal carico;
b) la potenza dissipata sulla linea.



$v_g(t) = 10\cos\left(2\pi 10^8 t\right)$ V
Z_g = 50 Ω
$Z = j100$ Ω
l = 85.25 m
ε_r = 9
Z_c = 50 [Ω]

Soluzione:

La prima risposta è immediata: essendo il carico puramente reattivo (induttanza in questo caso), esso non è in grado di assorbire potenza. Dunque la potenza assorbita dal carico *Z* è nulla.
A questo risultato si giunge anche risolvendo l'esercizio secondo la procedura classica. Si noti che il generatore è adattato alla linea e quindi, ragionando nel tempo, si ha una sola riflessione al carico. La potenza che dunque viene assorbita al carico si calcola come:

$$P_L = P_d \exp(-2\alpha l)\left(1-|\Gamma_{BB}|^2\right) \text{ W}$$

dove

$$P_d = \frac{|V_g|^2}{8\,\mathrm{Re}(Z_g)} = \frac{10^2}{8\cdot 50} = 0.25 \text{ W} \quad \text{e} \quad |\Gamma_{BB}| = \left|\frac{Z-Z_c}{Z+Z_c}\right| = 1$$

Dunque, come deve essere, P_L = 0 W.

Per determinare la potenza assorbita dalla linea invece è necessario riportare il carico *Z* alla sezione AA. Il carico normalizzato vale:

$$\overline{Z} = Z/Z_c = j2$$

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = 1 \text{ m}$$

Da cui:

$$\bar{l} = \frac{l}{\lambda} = 85.25 = 85 + 0.25$$

Riportare *Z* alla sezione AA sulla carta significa ruotare di 0.25 (λ/4) e applicare il fattore di attenuazione:

$\alpha = 25$ dB/km = 25/(8.686·1000)= 2.9·10^{-3} Np/m

$\exp(-2\alpha l)$= 0.61

Dunque si avrà:

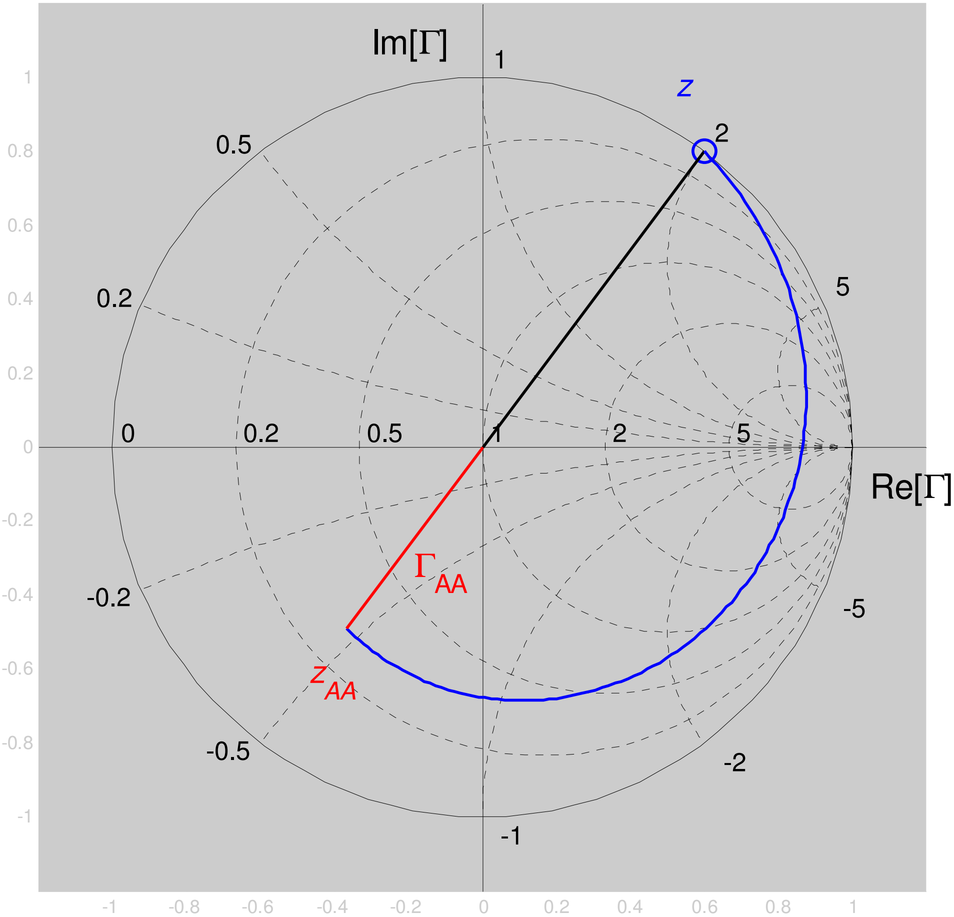
$$|\Gamma_{AA}| = |\Gamma_{BB}| 0.61 = 0.61$$

che riportato sulla carta di Smith permette di calcolare $\overline{Z}_{AA}$:

$$\overline{Z}_{AA} = 0.296 - j0.464$$

Si ottiene dunque:

$$Z_{AA} = 14.8 - j23.2 \ \Omega$$



La potenza che passa la sezione AA è dunque:

$$P_{AA} = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 0.157 \text{ W}$$

Si noti che dato che il generatore è adattato alla linea (dunque $|\Gamma_g| = |\Gamma_{AA}|$), non è in realtà necessario trovare il valore di Z_{AA}.

La potenza dissipata sulla linea è:

$$P_l = P_{AA} - P_L = 0.157 \text{ W}$$

Ovviamente tutta la potenza è assorbita (dissipata) dalla linea.

Esercizio 4

Una stazione ricevente di terra è orientata verso un satellite geostazionario (GEO, distanza dalla superficie terrestre $r_{GEO} \approx 36000$ km), posto a un'elevazione $\alpha = 60°$ da terra, che trasmette alla frequenza $f = 15$ GHz. Si assuma che la stazione di terra e il satellite geostazionario siano puntati in modo ottimo (direzione di massima radiazione per entrambi).

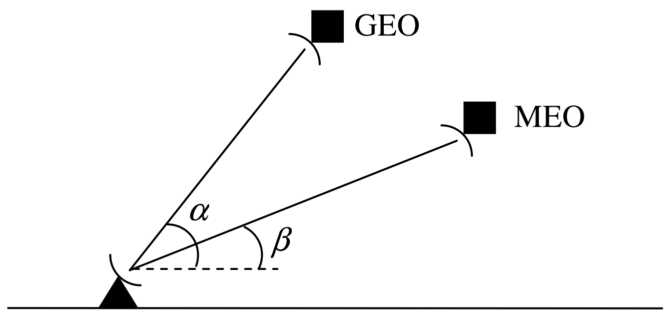
La funzione di direttività dell'antenna di terra è $f_R(\theta,\phi) = \left(\frac{1+\cos(\theta)}{4}\right)^2$, la sua direttività è $D = 3$ e la sua efficienza è $\eta_R = 0.8$.

Il satellite geostazionario trasmette una potenza $P_{GEO} = 10$ W e l'area efficace della sua antenna vale $A_{GEO} = 0.32$ m^2.

a) Calcolare la potenza ricevuta dal satellite geostazionario P_1 (si consideri trascurabile l'effetto dell'atmosfera).

Un satellite in orbita media (MEO, distanza dalla superficie terrestre $r_{MEO} \approx 20000$ km) trasmette alla stessa frequenza e, ad un dato istante, si trova ad un'elevazione $\beta = 30°$ da terra per la stazione ricevente. Il satellite MEO irradia una potenza $P_{MEO} = 5$ W e la stazione di terra si trova nella direzione di massima radiazione della sua antenna, che ha guadagno di $G_{MEO} = 25$ dB.

b) Calcolare il rapporto $I = P_2/P_1$ dove P_2 è la potenza interferente ricevuta dalla stazione di terra (si consideri trascurabile l'effetto dell'atmosfera).



Soluzione:

Link budget per il satellite GEO:

$$P_1 = \frac{P_{GEO}}{4\pi (r_{GEO})^2} G_{GEO} A_E$$

dove G_{GEO} è il guadagno dell'antenna a bordo del satellite geostazionario e si ricava dalla sua area equivalente:

$$G_{GEO} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{GEO} \approx 10000 = 40 \text{ dB}$$

L'area equivalente dell'antenna in ricezione vale invece:

$$A_E = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_E = \frac{\lambda^2}{4\pi} D\eta_R \approx 7.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

La potenza P_1 vale dunque:
$P_1 \approx 4.7 \cdot 10^{-16}$ W

<u>Link budget per il satellite MEO</u>:
In questo caso bisogna considerare anche la funzione di direttività dell'antenna ricevente

$$P_2 = \frac{P_{MEO}}{4\pi (r_{MEO})^2} G_{MEO} A_E f_R(\alpha - \beta)$$

con:
$G_{MEO} = 25 \text{ dB} \approx 316$

$$f_R(\alpha - \beta) = f_R(30°) = \left(\frac{1 + \cos(30)}{4} \right)^2 = 0.218$$

Dunque:
$P_2 \approx 5.2 \cdot 10^{-18}$ W

Il rapporto I vale:

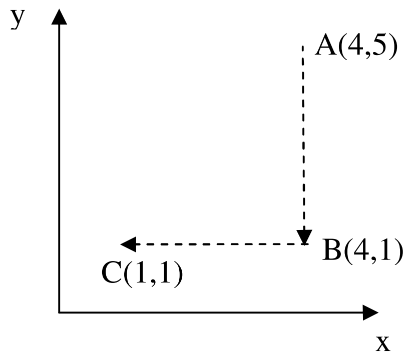
$$I = \frac{P_2}{P_1} = 0.0111 \approx -19.6 \text{ dB}$$

Esercizio 5 (FACOLTATIVO)

Sia dato il campo vettoriale:

$$\vec{E}(x,y) = -\frac{1}{2}x\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\vec{\mu}_y$$

Calcolarne l'integrale di linea lungo il percorso orientato in figura.



Soluzione:

Si chiede di calcolare:

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si ottiene:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_5^1 \left(-\frac{1}{2}x\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\vec{\mu}_y\right)\cdot\left(dy\,\vec{\mu}_y\right) = \int_5^1 \frac{\sqrt{3}}{2}y\cdot dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_5^1 = -6\sqrt{3}$$

e

$$\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_4^1 \left(-\frac{1}{2}x\vec{\mu}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\vec{\mu}_y\right)\cdot\left(dx\,\vec{\mu}_x\right) = \int_4^1 -\frac{1}{2}x\cdot dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_4^1 = \frac{15}{4}$$

Dunque:

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -6\sqrt{3} + \frac{15}{4} \approx -6.64$$