Fisica dei mezzi trasmissivi – Prof. C. Capsoni
Prova dell'1 settembre 2011

1	2	3	4

non scrivere nella zona soprastante

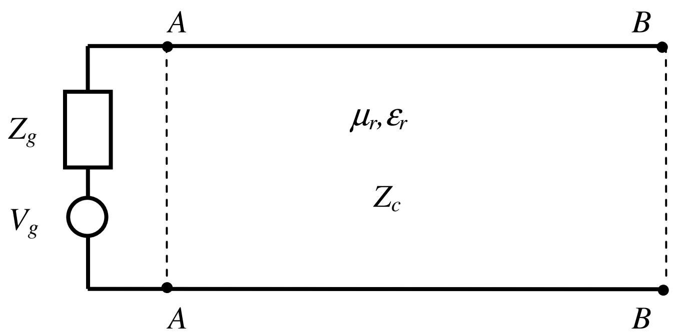
COGNOME E NOME ____

MATRICOLA ____

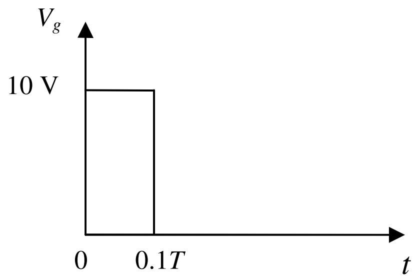
FIRMA ____

Esercizio 1

Un generatore, la cui tensione varia nel tempo come indicato in figura, è collegato ad una linea di trasmissione senza perdite terminata con un circuito aperto (T è il tempo di propagazione dalla sezione AA alla sezione BB).



$Z_g = 75\ \Omega$
$\varepsilon_r = 1$
$\mu_r = 1$
$Z_c = 50\ \Omega$



Si chiede di:

a) calcolare il coefficiente di riflessione (nel tempo) alla sezione BB;
b) calcolare il coefficiente di riflessione (nel tempo) alla sezione AA;
c) disegnare l'andamento di V_{BB}, la tensione alla sezione del carico, per $0 < t < 6T$.

Soluzione:

a) Il coefficiente di riflessione (nel tempo) sul carico vale:

$$\Gamma_{BB} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} = 1 \text{ essendo } Z \to \infty \text{ (circuito aperto)}$$

b) Il coefficiente di riflessione (nel tempo) alla sezione del generatore vale:

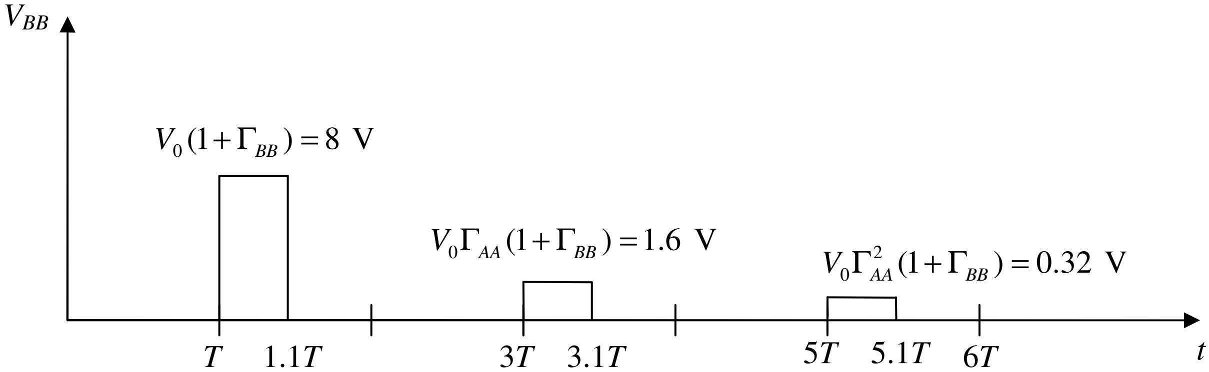
$$\Gamma_{AA} = \frac{Z_g - Z_c}{Z_g + Z_c} = 0.2$$

Dato che non c'è adattamento alla linea di trasmissione in nessuna delle due sezioni, ci saranno riflessioni multiple, progressivamente smorzate dal parziale assorbimento della potenza da parte di Z_g.

c) La tensione iniziale alla sezione AA si determina con il partitore di tensione fra Z_g e Z_c:

$$V_0 = V_g \frac{Z_c}{Z_g + Z_c} = 4 \text{ V} \quad (0 < t < 0.1T)$$

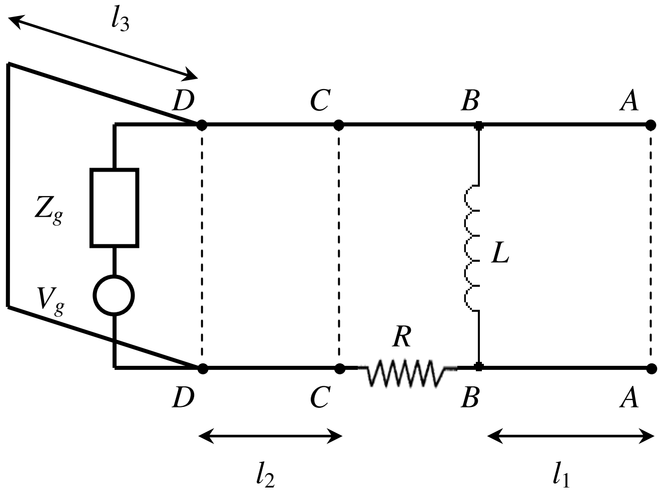
L'andamento della tensione misurato alla sezione BB è sovrapposizione di onda progressiva V^+ e onda regressiva V^-. In particolare si avrà:



Esercizio 2

Si faccia riferimento al circuito indicato in figura (frequenza di operazione f = 1 GHz).

a) Dimensionare la lunghezza l_1 per annullare l'effetto della'induttanza L (ossia per avere un corto circuito alla sezione BB in parallelo all'induttanza L).
b) Dimensionare l_3 per avere un carico reale alla sezione di ingresso del circuito (a sinistra della sezione DD) assumendo il valore di l_1 determinato al punto precedente.
c) Calcolare la potenza assorbita dalla resistenza R, assumendo i valori di l_1 e l_3 determinati ai punti precedenti.



f = 1 GHz
$\varepsilon_r = 1$
$\mu_r = 1$
$Z_c = 50\ \Omega$
$Z_g = 100\ \Omega$
$V_g = 10$ V
$R = 150\ \Omega$
$L = 7.96$ nH
$l_2 = 0.0375$ m

Soluzione:

a) Per ottenere un corto circuito alla sezione BB, la lunghezza l_1 normalizzata deve valere: $\bar{l}_1 = 0.25 \quad \Rightarrow \quad l_1 = 0.075$ m (sulla carta di Smith ciò equivale al passaggio dal punto 0 al punto ∞), dato che la lunghezza d'onda vale 0.3 m. L'impedenza totale dovuta alla somma in parallelo del corto circuito e dell'impedenza L risulta ancora un corto circuito:

$$Z_{BB} = \frac{0 \cdot j\omega L}{0 + j\omega L} = 0\ \Omega$$

b) Alla luce del dimensionamento di l_1 al punto precedente, alla sezione CC si ha un'impedenza totale $Z_{CC} = R = 150\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_{CC} = 3$. Considerando la lunghezza normalizzata $\bar{l}_2 = 0.125$, dalla carta di Smith si ottiene (appena a destra della sezione DD):

$$\bar{Z}^{+}_{DD} = 0.6 - j0.8 \quad \Rightarrow \quad Z^{+}_{DD} = 30 - j40\ \Omega$$

Dunque:

$$\bar{Y}^{+}_{DD} = 0.6 + j0.8$$

L'ammettenza dello stub in CC riportato alla sezione DD deve dunque valere –j0.8. Ciò si ottiene con una rotazione sulla carta di Smith pari a $\bar{l}_3 = 0.393 - 0.25 = 0.143 \quad \Rightarrow \quad l_3 = 0.0429$ m.

Dunque si ha (appena a sinistra della sezione DD):

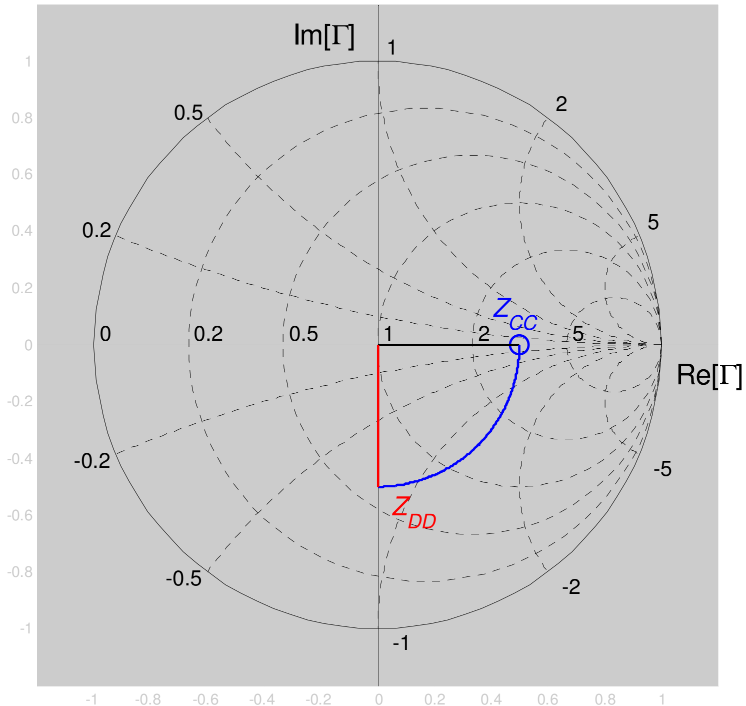
$$\bar{Y}^{-}_{DD} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}^{-}_{DD} = 1.667 \quad \Rightarrow \quad Z^{-}_{DD} = 83.35\ \Omega$$

c) Si ha:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{DD}^{-} - Z_g}{Z_{DD}^{-} + Z_g} = \text{-}0.091$$

La potenza che passa la sezione DD, e assorbita dunque da *R*, vale:

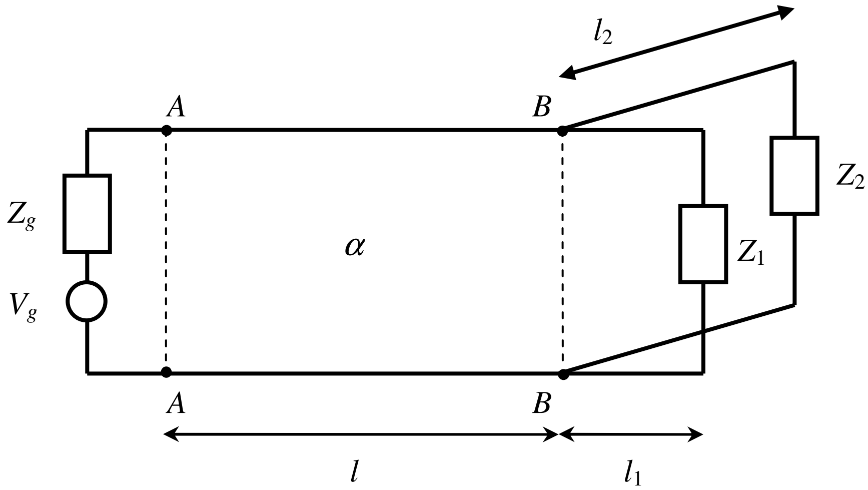
$$P_R = P_d\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = \frac{\left|V_g\right|^2}{8\,\mathrm{Re}\left(Z_g\right)}\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = 0.124\ \ \mathrm{W}$$



Esercizio 3

Sia dato il circuito in figura (per tutte le linee di trasmissione in figura: $Z_C = 50\ \Omega$, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$):

a) Dimensionare la lunghezza l_2 perché Z_1 e Z_2 assorbano la stessa potenza.
b) Calcolare la potenza assorbita da Z_1 e Z_2 con l_2 dimensionato al punto precedente e assumendo assenti le perdite sul tratto di linea di lunghezza l ($\alpha = 0$ dB/km).
c) Determinare la potenza che passa oltre la sezione AA (potenza ceduta dal generatore al sistema linea + carichi), considerando le perdite sul tratto di linea di lunghezza l ($\alpha = 100$ dB/km).
d) FACOLTATIVO: calcolare, con le stesse condizioni al punto c), la potenza assorbita da Z_1 e Z_2 e quella assorbita dal tratto di linea di lunghezza l.



$f = 300$ MHz
$V_g = 10$ V
$Z_g = 75\ \Omega$
$Z_1 = 125\ \Omega$
$Z_2 = 19.23\ \Omega$
$l = 12.25$ m
$l_1 = 0.162$ m

Soluzione:

a) Perché i due carichi assorbano la stessa potenza, la parte reale della loro ammettenza (alla sezione BB) deve essere uguale. Per il carico Z_1, si ha:

$\overline{Z}_1 = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \overline{Y}_1 = 0.4$

Dalla carta di Smith, percorrendo una distanza normalizzata $\bar{l}_1 = 0.162$ (la lunghezza d'onda per tutto il circuito vale 1 m), si ottiene:

$\overline{Y}_{1BB} = 1 + j$

Dunque deve essere $\mathrm{Re}\left(\overline{Y}_{2BB}\right) = 1$. Si parte normalizzando il secondo carico:

$\overline{Z}_2 = 0.3846 \quad \Rightarrow \quad \overline{Y}_2 = 2.6$

La rotazione necessaria per incrociare la circonferenza parte reale = 1 sulla carta di Smith corrisponde a una lunghezza normalizzata $\bar{l}_2 = 0.338 - 0.25 = 0.088 \quad \Rightarrow \quad l_2 = 0.088$ m. In seguito a tale rotazione si ottiene:

$\overline{Y}_{2BB} = 1 - j$

Da cui:

$\overline{Y}_{BB} = \overline{Y}_{1BB} + \overline{Y}_{2BB} = 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{BB} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad Z_{BB} = 25\ \Omega$

b) Bisogna riportare Z_{BB} alla sezione AA usando la carta di Smith e considerando la lunghezza normalizzata $\bar{l}_1 = 12.25 = 12 + 0.25$. Si ottiene dunque (tratto $\lambda/4$):

$\overline{Z}_{AA} = 2 \quad \Rightarrow \quad Z_{AA} = 100\ \Omega$

$$\Gamma_g = \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} = 0.1429$$

La potenza assorbita da Z_1 (uguale a quella assorbita da Z_2) vale:

$$P_R = \frac{P_d\left(1 - |\Gamma_g|^2\right)}{2} = \frac{1}{2}\frac{|V_g|^2}{8\,\mathrm{Re}(Z_g)}\left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 0.0816 \text{ W}$$

c) Nel caso di perdite, alla rotazione sulla carta di Smith bisogna aggiungere una compressione del modulo del coefficiente di riflessione secondo la formula:

$$|\Gamma_{AA}| = |\Gamma_{BB}| e^{-2\alpha l} = |\Gamma_{BB}| 0.7545 = 0.252$$

con $|\Gamma_{BB}| = \dfrac{Z_{BB} - Z_C}{Z_{BB} + Z_C} = 0.333$ e $\alpha = 11.5 \cdot 10^{-3}$ Np/m

Dalla carta di Smith si ottiene: $\overline{Z}_{AA} = 1.68 \quad \Rightarrow \quad Z_{AA} = 84\ \Omega$

Da cui:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{AA} - Z_g}{Z_{AA} + Z_g} = 0.057$$

La potenza che passa la seziona AA vale:

$$P_{AA} = P_d\left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 0.1661 \text{ W}$$

d) Nel caso di linea con perdite in cui né il carico né il generatore sono adattati alla linea, per calcolare la potenza assorbita dai carichi, bisogna passare necessariamente attraverso la formulazione ad onde, partendo dalla sezione AA verso la sezione BB. I passaggi sono i seguenti:

- Alla seziona AA, si può calcolare V_{AA} con il partitore di tensione:

  $$V_{AA} = V_g \frac{Z_{AA}}{Z_{AA} + Z_g} = 5.28 \text{ V}$$

- Alla sezione AA vale la relazione:

  $$V_{AA} = V_{AA}^+ \left(1 + \Gamma_{AA}\right) \quad \Rightarrow \quad V_{AA}^+ = \frac{V_{AA}}{1 + \Gamma_{AA}} = 4.21 \text{ V}$$

  dove V_{AA}^+ è l'onda di tensione progressiva appena a destra della sezione AA.

- L'onda progressiva che incide sulla sezione BB vale:

  $$V_{BB}^+ = V_{AA}^+ e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} = -j3.66 \text{ V}$$

  con $\alpha = 11.5 \cdot 10^{-3}$ Np/m e $\beta = 6.28$ rad/m

- La tensione totale alla sezione BB vale:

  $$V_{BB} = V_{BB}^+ + V_{BB}^- = V_{BB}^+\left(1 + \Gamma_{BB}\right) = -j2.44 \text{ V}$$

- La potenza assorbita singolarmente dai due carichi (che è la stessa) vale:

  $$P_R = \left[\frac{1}{2}|V_{BB}|^2 \,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_{BB}}\right)\right] \Big/ 2 = 0.0595 \text{ W}$$

- La potenza assorbita dalla linea sarà:

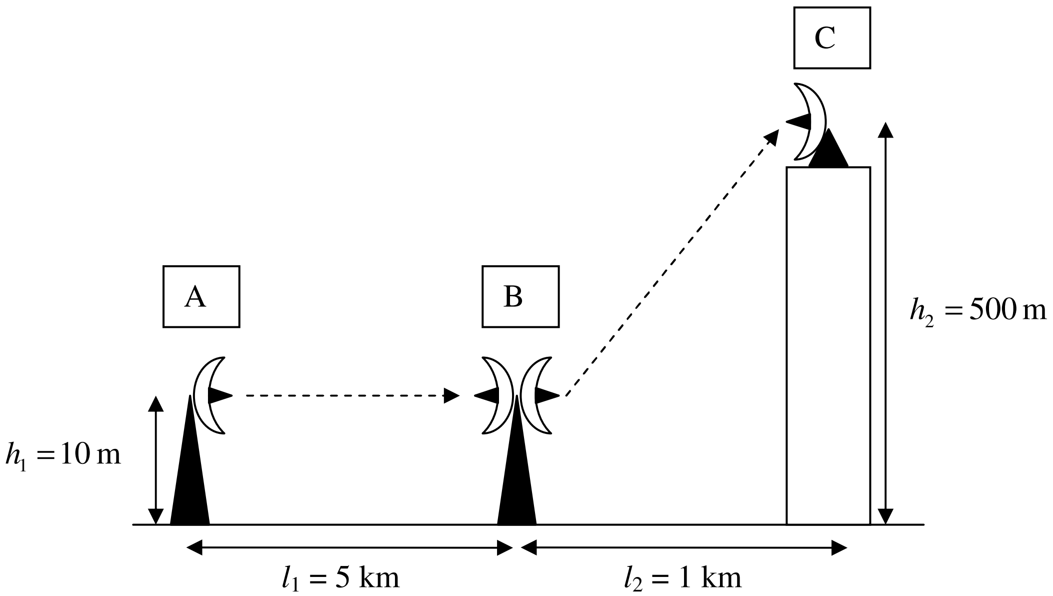
  $$P_l = P_{AA} - 2P_R = 0.047 \text{ W}$$

Esercizio 4

Si consideri la trasmissione di un segnale elettromagnetico dal punto A al punto C attraverso due ponti radio operanti a 100 MHz (si faccia riferimento alla geometria riportata in figura). Tutte le antenne sono identiche e hanno le seguenti caratteristiche: efficienza $\eta = 0.8$, funzione di direttività $f(\theta) = (\cos\theta)^6$, direttività $D = 7$. La potenza trasmessa da A è pari a $P_{TA} = 50$ W. In B è posto un ripetitore di segnale che amplifica linearmente la potenza ricevuta, ossia la potenza trasmessa da B verso il ricevitore C vale $P_{TB} = k\, P_{RB}$, dove P_{RB} è la potenza ricevuta in B dal trasmettitore posto in A. Considerando le distanze fra gli apparati e le altezze da terra indicate in figura, calcolare:

a) P_{RB}, la potenza ricevuta in B da A;
b) il fattore di amplificazione k perché P_{RC},la potenza ricevuta in C da B, sia pari a 1 nW.

(Nota: si trascurino gli effetti del terreno).



Soluzione:

a) La potenza ricevuta in B da A vale:

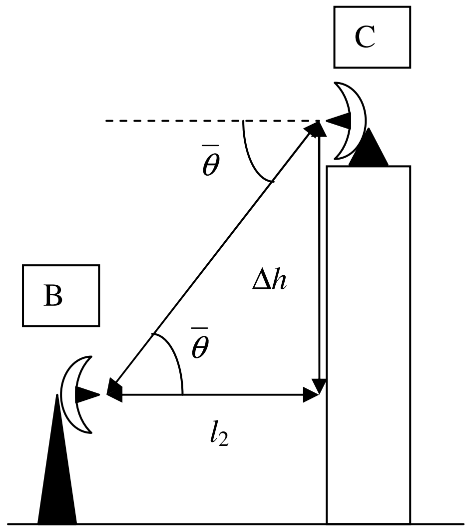
$$P_{RB} = \frac{P_{TA}}{4\pi (l_1)^2} G A_E = 3.6 \ \mu\text{W (antenne puntate ottimamente)}$$

con $G = \eta D = 5.6$ e $A_E = G\lambda^2 / 4\pi = 4.01\ \text{m}^2$ (la lunghezza d'onda vale 3 m).

b) Considerando che le antenne non sono ottimamente puntate (da cui l'introduzione della funzione di direttività $f(\theta)$), la potenza ricevuta in C da B vale:

$$P_{RC} = \frac{P_{TB}}{4\pi (L)^2} f(\bar{\theta})^2 G A_E = \frac{k\, P_{RB}}{4\pi (L)^2} f(\bar{\theta})^2 G A_E \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P_{RC}\, 4\pi (L)^2}{P_{RB} f(\bar{\theta})^2 G A_E}$$

dove, facendo riferimento alla figura sottostante:



$L = \sqrt{l_2^2 + \Delta h^2} = 1113.6$ m con $\Delta h = h_2 - h_1 = 490$ m

$\bar{\theta} = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta h}{l_2}\right) = 26.1° \quad \Rightarrow \quad f(\bar{\theta}) = 0.525$

Imponendo $P_{RC} = 1$ nW, si ottiene dunque

$$P_{RC} = \frac{P_{TB}}{4\pi(L)^2} f(\bar{\theta})^2 GA_E = \frac{k\,P_{RB}}{4\pi(L)^2} f(\bar{\theta})^2 GA_E \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P_{RC}\,4\pi(L)^2}{P_{RB}\,f(\bar{\theta})^2 GA_E} \approx 700$$