Fisica dei mezzi trasmissivi – Prof. C. Capsoni
Prova del 21 settembre 2012

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ____

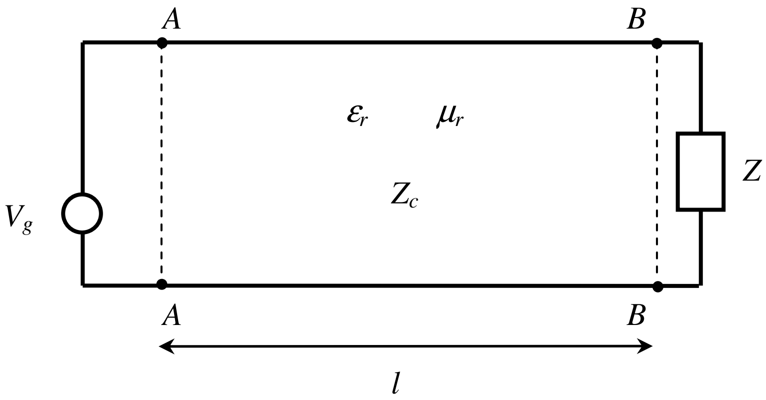
MATRICOLA ____

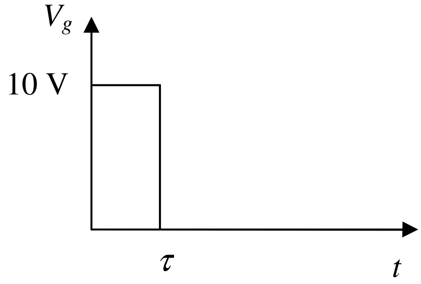
FIRMA ____

Esercizio 1

Un generatore, la cui tensione varia nel tempo come indicato in figura, è collegato ad un carico Z attraverso una linea di trasmissione senza perdite.

$Z = 25\ \Omega$
$l = 120$ m
$\varepsilon_r = 16$
$\mu_r = 1$
$Z_c = 100\ \Omega$
$\tau = 10$ ns





Si chiede di:

a) calcolare il coefficiente di riflessione sul carico Z;
b) calcolare T, il tempo di propagazione del segnale dal generatore al carico;
c) disegnare l'andamento di V_B, la tensione sul carico, per $0 < t < 9$ μs.

Soluzione:

a) Il coefficiente di riflessione sul carico vale:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} = -0.6$$

b) La velocità di propagazione del segnale vale:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = 0.75 \times 10^8 \ \text{m/s}$$

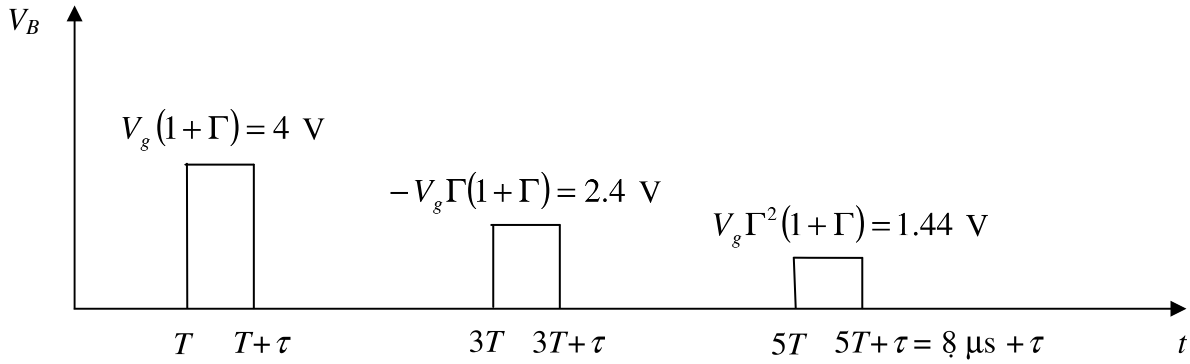
e dunque il tempo di propagazione del segnale dal generatore al carico vale:

$$T = \frac{l}{v} = 1.6 \ \mu\text{s}$$

c) Il coefficiente di riflessione alla sezione del generatore vale ($Z_g = 0 \ \Omega$):

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_c}{Z_g + Z_c} = -1$$

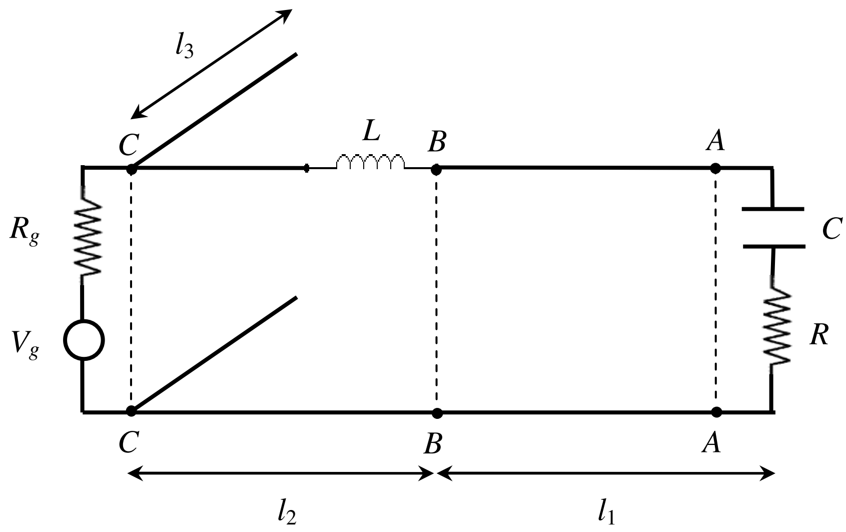
Dunque l'andamento della tensione sul carico sarà:



Esercizio 2

Si faccia riferimento al circuito indicato in figura ($\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$ e $Z_c = 50\ \Omega$ ovunque).

a) Calcolare la potenza assorbita da R, considerando $l_3 = 0$.
b) Calcolare la potenza assorbita da L, considerando $l_3 = 0$.
c) FACOLTATIVO: Calcolare il modulo della tensione V_{AA}, considerando $l_3 = 0$.
d) Determinare l_3 per massimizzare la potenza trasferita dal generatore ai carichi del circuito.



$R = 150\ \Omega$
$Z_C = 50\ \Omega$
$R_g = 20\ \Omega$
$l_1 = 0.36$ m
$l_2 = 0.15$ m
$\varepsilon_r = 1$
$\mu_r = 1$
$L = 40$ nH
$C = 3$ pF
$V_g = 30\cos(3.142\cdot10^9\, t)$ V

Soluzione:

a) Dalla forma d'onda V_g si deriva l'ampiezza del fasore (30 V) e la frequenza di operazione (500 MHz). La lunghezza d'onda nel circuito vale dunque:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0.6\ \text{m}$$

Da cui si ricavano le seguenti lunghezze d'onda normalizzate per i due tratti in parallelo:

$$\bar{l}_1 = l_1/\lambda = 0.6 = 0.5 + 0.1$$

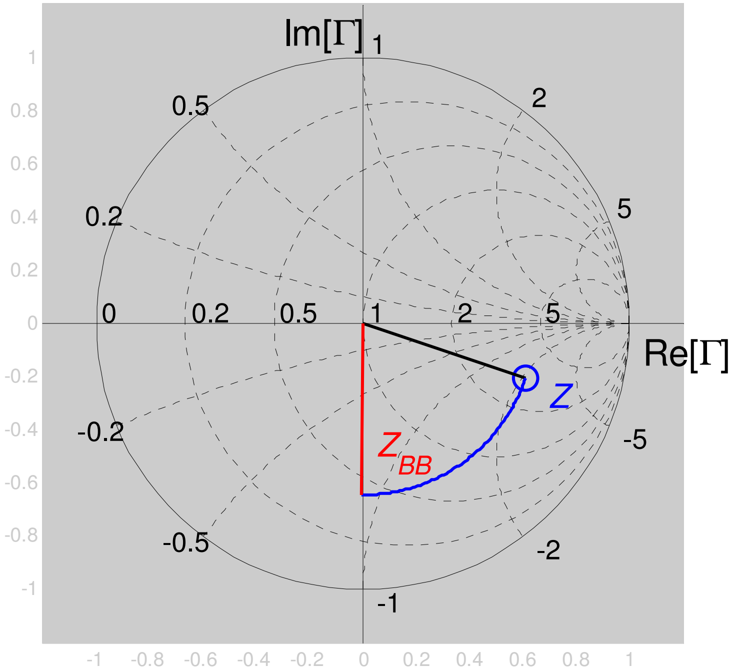
$$\bar{l}_2 = l_2/\lambda = 0.25$$

Il carico alla sezione AA vale:

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 150 - j106\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \bar{Z} = \frac{Z}{Z_C} = 3 - j2.12$$

Effettuando la rotazione sulla carta di Smith si ottiene:

$$\bar{Z}_{BB} = 0.41 - j0.9 \quad \Rightarrow \quad Z_{BB} = 20.5 - j45\ \Omega$$



Sommando in serie l'induttanza si ottiene:

$$Z_{BB}^{*} = Z_{BB} + j\omega L = 20.5 + j80.7\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{BB}^{*} = 0.41 + j1.61$$

Il tratto di linea l_2 corrisponde a $\lambda/4$, dunque:

$$Z_{CC} = \frac{Z_C^2}{Z_{BB}^{*}} = 7.4 - j29.1\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{CC} = 0.15 - j0.58 \quad \Rightarrow \quad \overline{Y}_{CC} = 0.41 + j1.61$$

Il coefficiente di riflessione (rispetto al generatore) vale:

$$\Gamma_g = \frac{Z_{CC} - Z_g}{Z_{CC} + Z_g} = 0.31 - j0.73$$

Da cui, la potenza assorbita dal carico R si calcola come:

$$P_R = P_d\left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = \frac{|V_0|^2}{8\,\mathrm{Re}(R_g)}\left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 2.1\ \mathrm{W}$$

b) La potenza assorbita dall'induttanza L è nulla perché tale elemento è puramente reattivo (stessa cosa vale per la capacità C).

c) Si ha che:

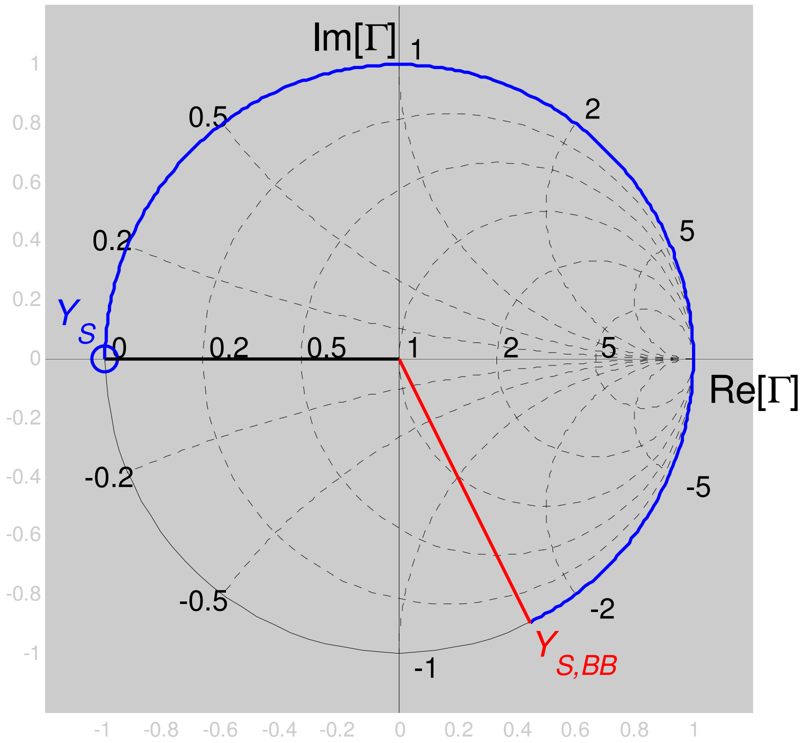
$$P_R = P_{AA} = \frac{1}{2}|V_{AA}|^2\,\mathrm{Re}[1/Z]$$

Da cui:

$$|V_{AA}| = \sqrt{\frac{2P_{AA}}{\mathrm{Re}[1/Z]}} = 30.7\ \mathrm{V}$$

d) L'introduzione dello stub in parallelo alla sezione CC (l_3 > 0) permette operare sulla parte immaginaria del carico Z_{CC}. In particolare, per massimizzare la potenza trasferita dal generatore al circuito (carico R) è necessario annullare la parte immaginaria di Y_{CC}. L'ammettenza normalizzata dello stub, alla sezione CC, deve dunque valere $-j1.61$. Utilizzando la carta di Smith si ottiene:

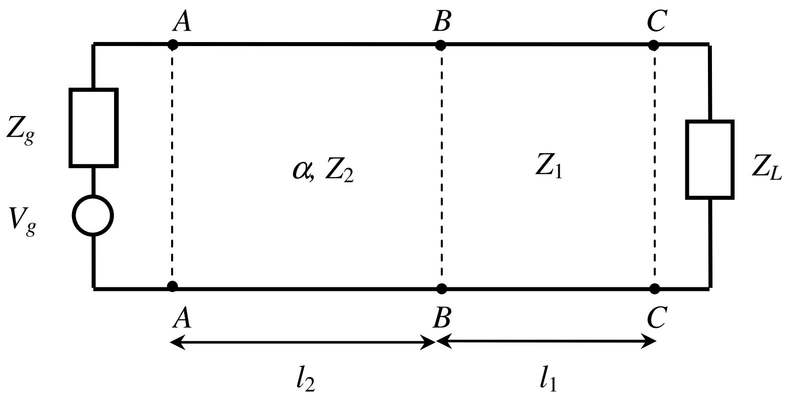
$\bar{l}_3 = 0.339 \quad \Rightarrow \quad l_3 = 0.2034 \text{ m}$



Esercizio 3

Facendo riferimento al circuito in figura (tratto BB-CC senza perdite e con impedenza caratteristica Z_1, tratto AA-BB con perdite e impedenza caratteristica Z_2, ovunque $\varepsilon_r = \mu_r = 1$):

a) Calcolare P_{AA}, la potenza che passa oltre la sezione AA (ceduta a linea + carico) se $l_2 = 50.82$ m;
b) Calcolare P_L, la potenza assorbita dal carico Z_L se $l_2 = 50.82$ m;
c) FACOLTATIVO: Determinare il nuovo valore di l_2 perché la potenza che passa oltre la sezione AA sia pari a 0.16 W.



$V_g = 10$ V
$f = 1$ GHz
$Z_g = 50\ \Omega$
$Z_1 = 150\ \Omega$
$Z_2 = 50\ \Omega$
$Z_L = 270 + j\,270\ \Omega$
$l_1 = 0.72$ m
$\alpha = 50$ dB/km

Soluzione:

a) Per riportare il carico Z_L alla sezione BB è necessario calcolare le quantità normalizzate:

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_1} = 1.8 + j1.8$$

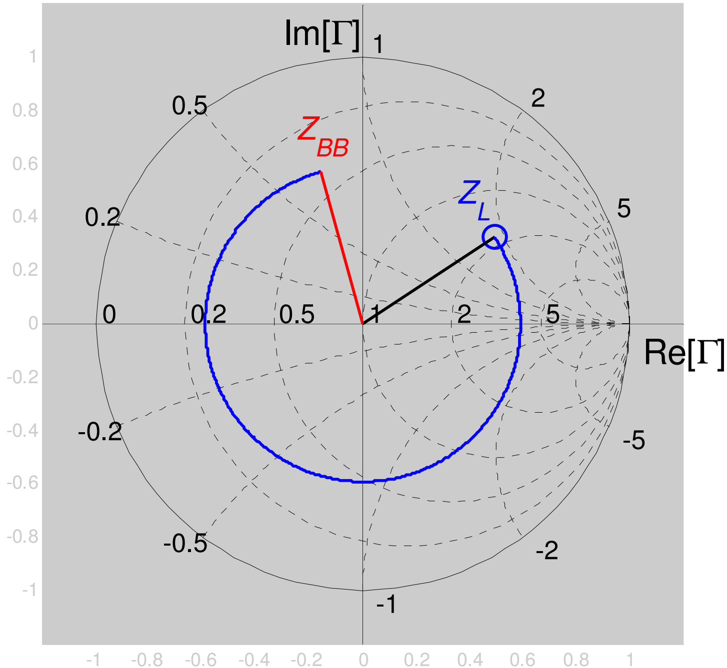
$$\bar{l}_1 = l_1 / \lambda = 2.4 = 2 + 0.4$$

dove la lunghezza d'onda nel circuito vale:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0.3 \text{ m}$$

Usando la carta di Smith, si ottiene:

$$\bar{Z}_{BB} = 0.39 + j0.68 \quad \Rightarrow \quad Z_{BB} = 58.5 + j102\ \Omega$$



Rinormalizzando rispetto a Z_2:

$$\bar{Z}^*_{BB} = \frac{Z_{BB}}{Z_2} = 1.17 + j2.04$$

Per riportare il carico Z_{BB} alla sezione AA è necessario tener conto anche delle perdite:

$$\Gamma_{AA} = \Gamma_{BB} \exp(-2\alpha l_2) \exp(-j2\beta l_2)$$

Nella domanda a) si ha:

$$\bar{l}_2 = l_2 / \lambda = 169.4 = 169 + 0.4$$

Il movimento sulla carta di Smith include dunque una rotazione a modulo di Γ costante e un'attenuazione pari a $\exp(-2\alpha l_2) = 0.5546$ ($\alpha = 50$ dB/km = 0.0058 Np/m). Si ottiene:

$$\bar{Z}_{AA} = 0.58 + j0.48$$

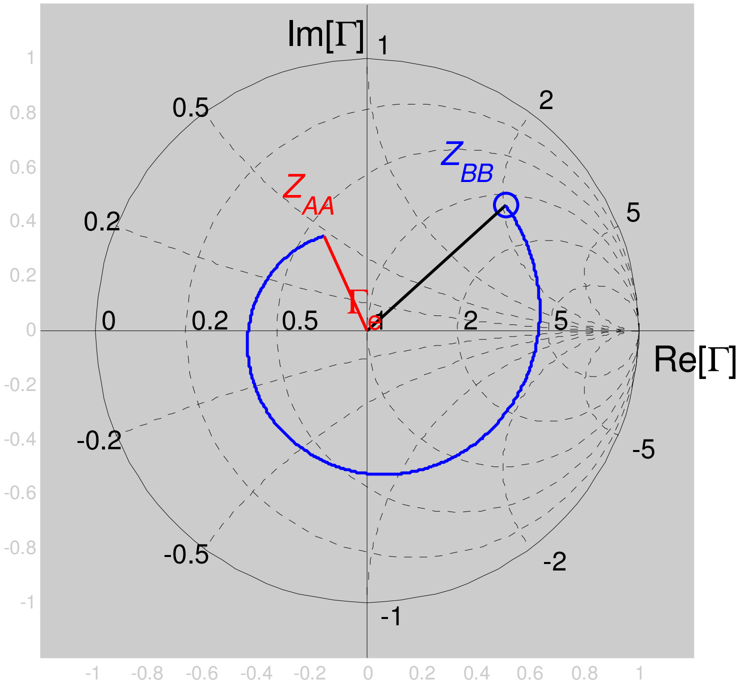
In realtà, per rispondere alla domanda a), dato che $Z_2 = Z_g$ ($\Gamma_{AA} = \Gamma_g$), è sufficiente calcolare $|\Gamma_{AA}|$:

$$|\Gamma_{AA}| = |\Gamma_{BB}| \exp(-2\alpha l_2) = |\Gamma_{BB}| 0.5546 = 0.381$$

con $|\Gamma_{BB}| = \left| \frac{Z_{BB} - Z_2}{Z_{BB} + Z_2} \right| = 0.687$

Dunque la potenza che passa la sezione AA vale:

$$P_{AA} = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = \frac{|V_0|^2}{8\,\mathrm{Re}(R_g)} \left(1 - |\Gamma_{AA}|^2\right) = 0.214 \text{ W}$$



b) La potenza assorbita dal carico Z_L si calcola come:

$$P_L = P_d \exp(-2\alpha l_2)\left(1-|\Gamma_{BB}|^2\right) = 73.2 \text{ mW}$$

c) Deve essere:

$$P_{AA} = P_d\left(1-|\Gamma_{AA}|^2\right) = 0.16 \text{ W}$$

Da cui:

$$|\Gamma_{AA}| = \sqrt{1-\frac{P_{AA}}{P_d}} = 0.6$$

Invertendo

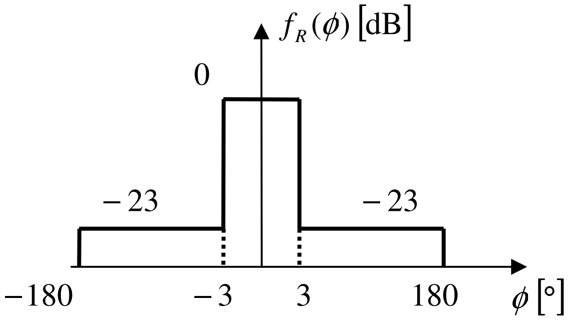
$$|\Gamma_{AA}| = |\Gamma_{BB}|\exp(-2\alpha l_2)$$

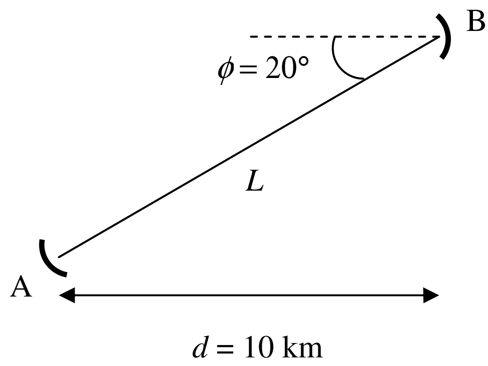
si ottiene:

$$l_2 = \ln\left(\frac{|\Gamma_{AA}|}{|\Gamma_{BB}|}\right)\Big/(-2\alpha) = 11.673 \text{ m}$$

Esercizio 4

Facendo riferimento alla figura sottostante, si consideri il collegamento wireless tra il trasmettitore posto in A e il ricevitore posto in B. La frequenza di operazione è f = 15 GHz e l'antenna posta in A è puntata ottimamente verso il ricevitore in B.
Il sistema di comunicazione in A ha le seguenti caratteristiche: potenza trasmessa P_T = 10 mW, efficienza d'antenna η_T = 0.7. Il sistema di comunicazione posto in B ha le seguenti caratteristiche: funzione di direttività indicata in figura e area equivalente A_e = 0.25 m^2.
Trascurando gli effetti dell'atmosfera, calcolare la direttività dell'antenna in trasmissione (D_T) necessaria a garantire una potenza minima ricevuta in B, P_R, pari a -90 dBm.





Soluzione:

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 2 \text{ cm}$$

Per l'antenna in B si ha:

Guadagno → $G_B = \dfrac{4\pi}{\lambda^2} A_e = 7854 = 38.95 \text{ dB}$

Il link budget è:

$$P_R = P_T \eta_T D_T f_T(0°) \left(\frac{\lambda}{4\pi L} \right)^2 f_R(20°) G_B = -90 \text{ dBm} = 1 \text{ pW}$$

Invertendo la formula sopra e sapendo che $f_T(0°) = 1$, $f_R(20°) = -23$ dB = 0.005, $L = d / \cos(20) = 10641.8$ m, si ottiene:

$$D_T \approx 163$$

Esercizio 5 (FACOLTATIVO)

Sia data la seguente espressione per il campo elettrico (regime sinusoidale stazionario) che si propaga in un mezzo senza perdite con $\varepsilon_R = \mu_R = 9$:

$$\vec{e}_1(t,z) = \cos\left(6.28 \cdot 10^8 t - \beta z\right)\vec{\mu}_y \text{ V/m}$$

a) Derivarne l'espressione fasoriale.
b) Calcolare la frequenza.
c) Calcolare la costante di propagazione β.
d) Indicare la direzione di propagazione.
e) Indicare la polarizzazione dell'onda.
f) Data l'onda

$$\vec{e}_2(t,z) = \cos\left(6.28 \cdot 10^8 t + \beta z + \frac{\pi}{4}\right)\vec{\mu}_y \text{ V/m}$$

calcolare $\vec{e}_3(t, z = 1\,\text{m}) = \vec{e}_1(t, z = 1\,\text{m})\,\vec{e}_2(t, z = 1\,\text{m})$ nella forma:

$\vec{e}_3(t, z = 1\,\text{m}) = A\cos(6.28 \cdot 10^8 t + \phi)$ V/m

Soluzione:

a) $\vec{E}_1 = e^{-j\beta z}\vec{\mu}_y$ V/m

b) $\omega = 2\pi f = 6.28 \cdot 10^8 \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} \approx 100$ MHz

c) $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_R \mu_R}}{c} = 18.85$ rad/m

d) La direzione di propagazione è $+z$

e) L'onda è polarizzata in direzione y.

f) $\vec{E}_2 = e^{j(\beta z + \pi/4)}\vec{\mu}_y$ V/m

In z = 1 m:

$\vec{E}_1 = e^{-j18.85}\vec{\mu}_y$ V/m

$\vec{E}_2 = e^{j19.65}\vec{\mu}_y$ V/m

$\vec{E}_3 = \vec{E}_1\vec{E}_2 = e^{j(19.65-18.85)}\vec{\mu}_y = e^{j(0.8)}\vec{\mu}_y$ V/m

$\vec{e}_3(t, z = 1\text{ m}) = \cos(6.28 \cdot 10^8 t + 0.8)\vec{\mu}_y$ V/m