Fisica dei mezzi trasmissivi – Prof. C. Capsoni
Prova del 7 settembre 2012

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

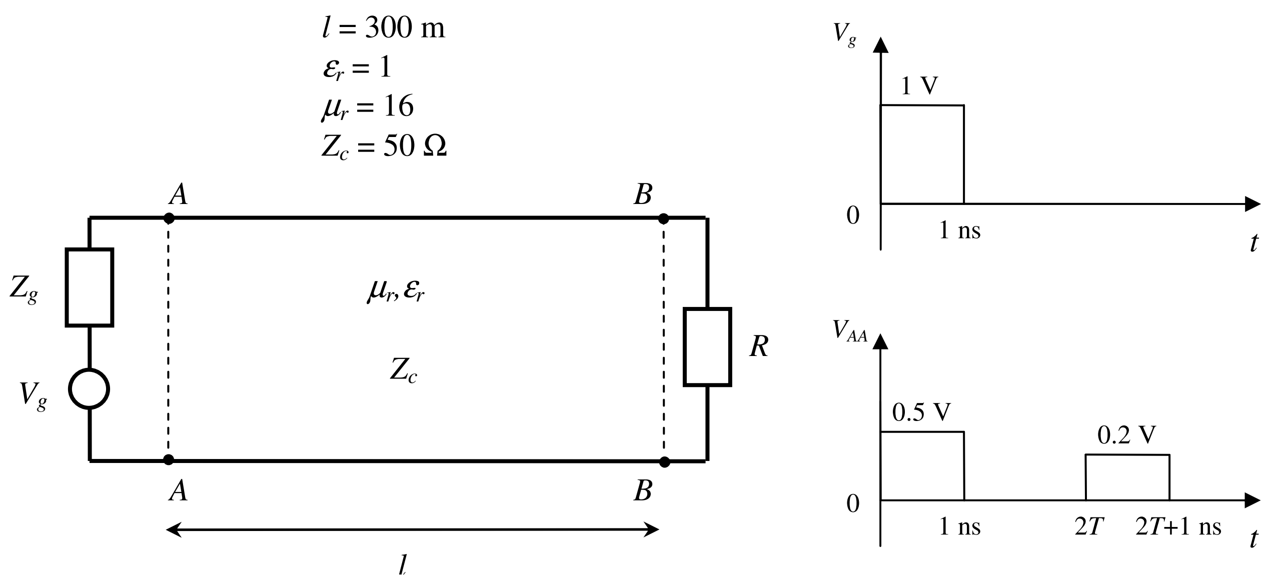
COGNOME E NOME ____

MATRICOLA ____

FIRMA ____

Esercizio 1

Un generatore, la cui tensione varia nel tempo come indicato in figura, è collegato ad un carico R attraverso una linea di trasmissione senza perdite di lunghezza l. E' noto anche l'andamento nel tempo della tensione alla sezione AA, V_{AA} (si faccia riferimento alla figura).



Si chiede di:

a) calcolare il valore dell'impedenza interna del generatore, Z_g;
b) calcolare il valore di T, il tempo di propagazione del segnale dalla sezione AA alla sezione BB;
c) coefficiente di riflessione (definito nel dominio del tempo) alla sezione AA;
d) calcolare il valore di R.

Soluzione:

a) Il valore di Z_g si ricava osservando l'andamento della tensione alla sezione AA per t < 1 ns. Infatti:

$$V_{AA} = V_g \frac{Z_c}{Z_c + Z_g} = 0.5 \text{ V} \quad (0 < t < 1 \text{ ns})$$

da cui si ottiene:

$$Z_c = Z_g = 50 \ \Omega$$

b) La velocità di propagazione del segnale vale:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = 0.75 \times 10^8 \text{ m/s}$$

e dunque il tempo di propagazione del segnale dal generatore al carico vale:

$$T = \frac{l}{v} = 4 \ \mu\text{s}$$

c) Il coefficiente di riflessione alla sezione AA, Γ_{AA}, è nullo perché $Z_c = Z_g = 50 \ \Omega$ ($\Gamma_{AA} = \frac{Z_g - Z_c}{Z_g + Z_c}$).

d) Al tempo 2T, il segnale, dopo essere stato riflesso alla sezione BB, torna alla sezione AA e viene poi completamente assorbito da Z_g poiché $Z_c = Z_g$, ossia $\Gamma_{AA} = 0$. Osservando l'andamento della tensione V_{AA} per $2T < t < 2T + 1$ ns, si ottiene dunque:

$$V_{AA} = V_g \frac{Z_c}{Z_c + Z_g} \Gamma_{BB} (1 + \Gamma_{AA}) = 0.2 \text{ V} \quad (2T < t < 2T + 1 \text{ ns})$$

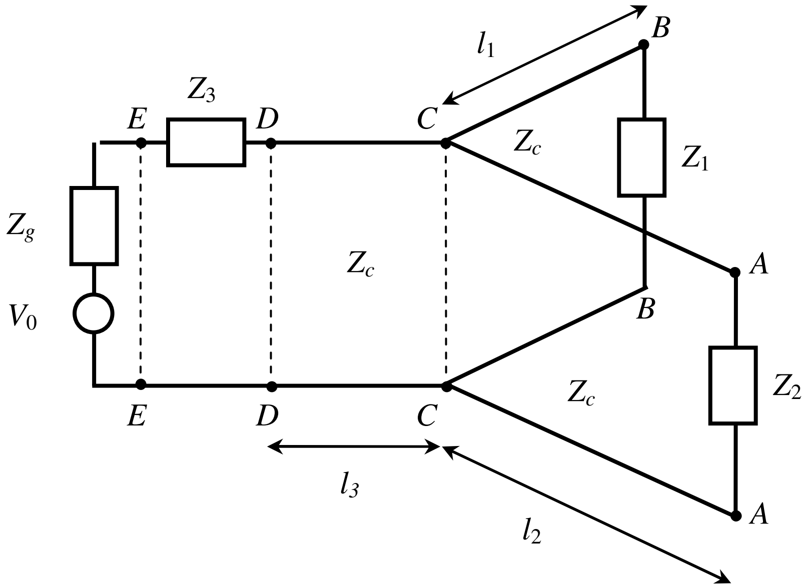
Ricordando che $\Gamma_{AA} = 0$ e che $\Gamma_{BB} = (R - Z_c)/(R + Z_c)$, si ottiene

$$V_{AA} = \frac{1}{2} \frac{R - Z_c}{R + Z_c} = 0.2 \quad \Rightarrow \quad 0.6R = 1.4Z_c \quad \Rightarrow \quad R = 116.7 \ \Omega$$

Esercizio 2

Si faccia riferimento al circuito indicato in figura (frequenza di operazione f = 500 MHz, ε_r = 25, μ_r = 1 e Z_c = 50 Ω ovunque).

a) Determinare il carico totale alla sezione CC.
b) Calcolare il coefficiente di riflessione alla sezione DD.
c) Calcolare la potenza totale erogata dal generatore all'insieme dei carichi nel circuito.
d) FACOLTATIVO: Calcolare la potenza assorbita dal carico Z_3.



f = 500 MHz
Z_1 = 150 + j 50 Ω
Z_2 = 80 - j 80 Ω
Z_3 = 29 - j 67 Ω
l_1 = 0.36 m
l_2 = 0.09 m
l_3 = 0.015 m
ε_r = 25
μ_r = 1
Z_c = 50 Ω
Z_g = 75 Ω
V_0 = 30 V

Soluzione:

a) La lunghezza d'onda nel circuito vale:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r\,\varepsilon_r}} = 0.12 \text{ m}$$

Da cui si ricavano le seguenti lunghezze d'onda normalizzate per i due tratti in parallelo:

$\bar{l}_1 = l_1/\lambda = 3$

$\bar{l}_2 = l_2/\lambda = 0.75 = 0.5 + 0.25$

Il tratto l_1 è multiplo di $\lambda/2$, da cui: $Z_{1C} = Z_1 = 150 + j50\ \Omega$.

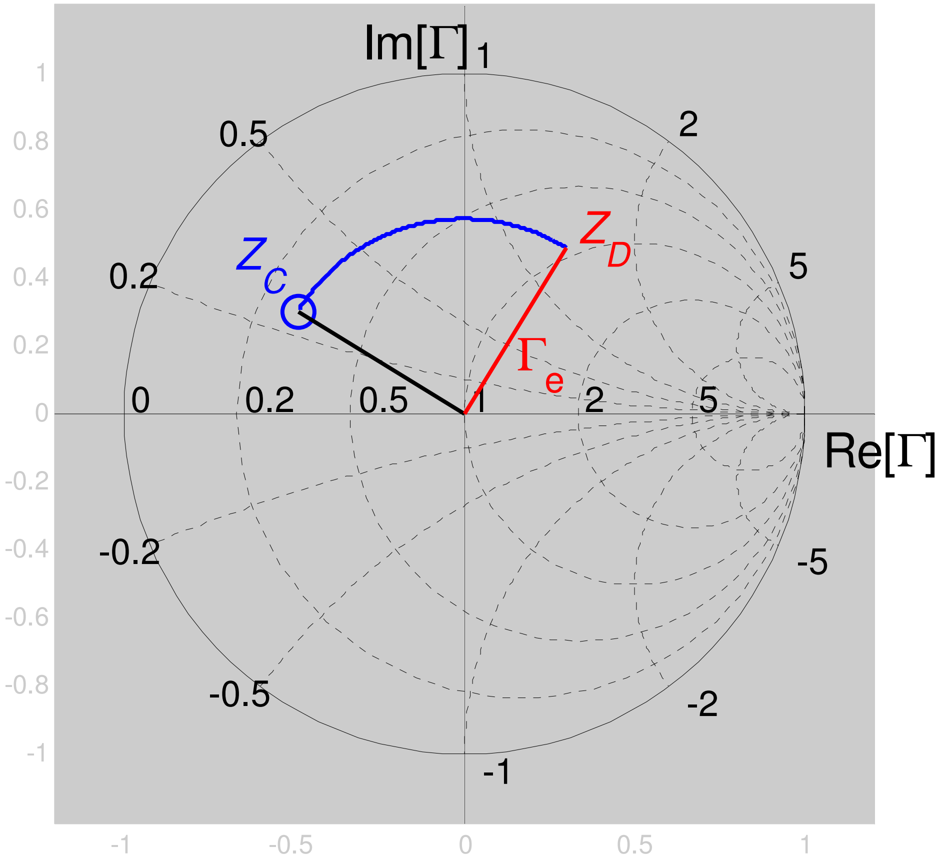
Il tratto l_2 è multiplo di $\lambda/4$, da cui: $Z_{2C} = Z_c^2 \big/ Z_2 = 15.625 + j15.625\ \Omega$.

Il carico totale alla sezione CC vale dunque:

$$Z_C = \frac{Z_{1C} Z_{2C}}{Z_{1C} + Z_{2C}} \approx 14.6 + j13.1\ \Omega$$

b) E' innanzitutto necessario riportare il carico Z_C alla sezione DD. Normalizzando il carico Z_C rispetto a Z_c, data la lunghezza normalizzata $\bar{l}_3 = l_3/\lambda = 0.125$, e utilizzando la carta di Smith, si ottiene:

$\bar{Z}_D = 0.92 + j1.34 \rightarrow Z_D = 46 + j67$



Da cui:

$$\Gamma_{DD} = \frac{Z_D - Z_c}{Z_D + Z_c} = 0.299 + j0.489$$

c) Sommando i due carichi in serie, si ottiene:

$$Z_E = Z_D + Z_3 = 75\ \Omega$$

Si è in condizione di massimo trasferimento di potenza ($\Gamma_g = \dfrac{Z_E - Z_g}{Z_E + Z_g} = 0$) e dunque la potenza totale erogata dal generatore all'insieme dei carichi nel circuito vale:

$$P_L = P_d\left(1 - \left|\Gamma_g\right|^2\right) = \frac{\left|V_0\right|^2}{8\,\mathrm{Re}\left(Z_g\right)} = 1.5\ \mathrm{W}$$

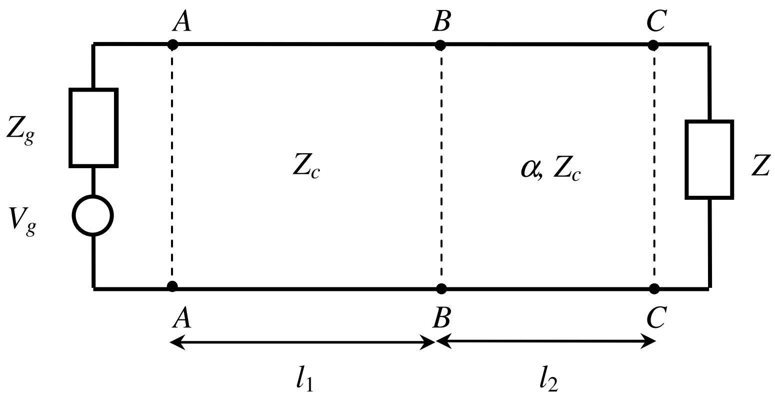
d) P_L si ripartisce sue due carichi, Z_D e Z_3, in base alle parti reali dell'impedenza:

$$P_{LD} = P_L \frac{\mathrm{Re}\left(Z_D\right)}{\mathrm{Re}\left(Z_D\right) + \mathrm{Re}\left(Z_3\right)} = 0.92\ \mathrm{W} \quad \text{e} \quad P_{L3} = P_L - P_{LD} = 0.58\ \mathrm{W}$$

Esercizio 3

Facendo riferimento al circuito in figura (tratto AA-BB senza perdite, tratto BB-CC con perdite, ovunque Z_c = 50 Ω e $\varepsilon_r = \mu_r = 1$):

a) Calcolare il valore dell'impedenza alla sezione BB;
b) Calcolare la potenza che passa oltre la sezione AA;
c) FACOLTATIVO: Calcolare la potenza dissipata sul tratto di linea BB-CC a causa delle perdite.



$V_g = 10$ V
f = 1 GHz
Z_g = 50 Ω
Z_c = 50 Ω
Z = 100 + j 100 Ω
α = 50 dB/km
l_1 = 1.26 m
l_2 = 50.61 m

Soluzione:

a) Per riportare il carico Z alla sezione BB è necessario tenere in considerazione le perdite sul tratto BB-CC.
Si converte prima il coefficiente di attenuazione in Np/m:
$\alpha = 50 \text{ dB/km} = 0.0058 \text{ Np/m}$

La lunghezza d'onda vale:

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = 0.3 \text{ m}$$

La lunghezza normalizzata del tratto BB-CC vale:

$\bar{l}_2 = l_2 / \lambda = 168.7 = 168.5 + 0.2$

L'impedenza di partenza normalizzata vale:

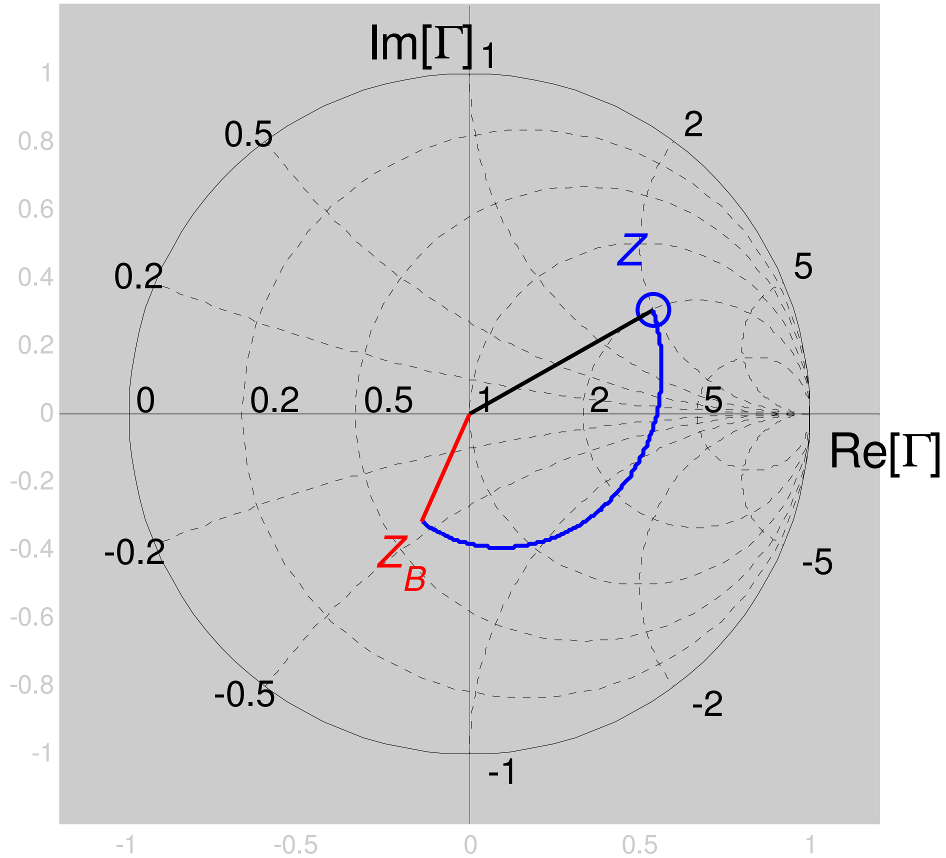
$\bar{Z} = Z / Z_C = 2 + j2$

Nel caso di perdite il movimento sulla carta di Smith comporta una rotazione in senso orario a pari modulo (come se non ci fossero perdite) in aggiunta alla contrazione del modulo di Γ dovuta alla perdite (in questo caso pari a $e^{-2\alpha l_2} = 0.556$). Si ha infatti:

$\Gamma_B = \Gamma_C \left(e^{-2\beta l_2}\right)\left(e^{-2\alpha l_2}\right)$

Utilizzando la carta di Smith si ottiene dunque:

$\bar{Z}_B = 0.63 - j0.45 \rightarrow Z_B = 31.5 - j22.5 \ \Omega$



b) La lunghezza normalizzata del tratto AA-BB vale:

$\bar{l}_1 = l_1 / \lambda = 4.2 = 4 + 0.2$

Passando sulla carta di Smith (in questo caso non ci sono perdite), si ottiene:

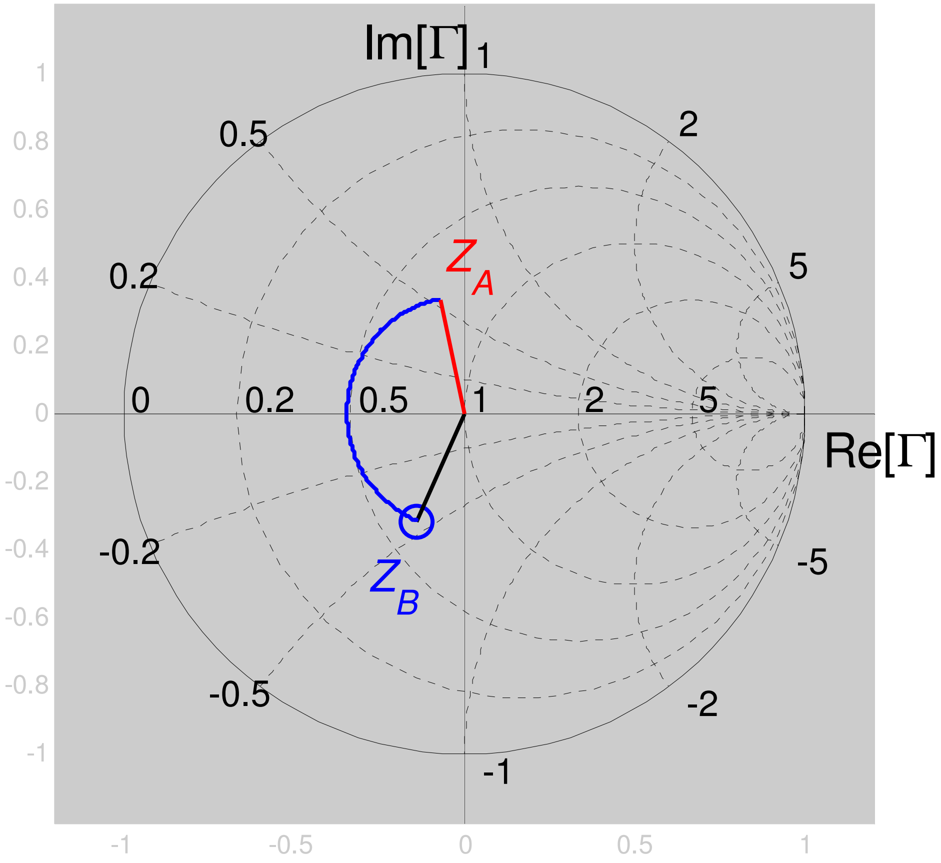
$\bar{Z}_A = 0.70 \ + j0.53 \rightarrow Z_A = 35 \ + \ j26.5 \ \Omega$

Si ottiene dunque:

$$\Gamma_g = \frac{Z_A - Z_g}{Z_A + Z_g} = \text{-}0.07 \ +j \ 0.33$$

La potenza che passa la sezione AA vale:

$$P_A = P_d \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = \frac{|V_0|^2}{8\,\mathrm{Re}(Z_g)} \left(1 - |\Gamma_g|^2\right) = 0.22 \text{ W}$$



c) Si calcola prima la potenza assorbita dal carico:

$$P_L = P_d \, e^{-2\alpha l_2}\left(1-\left|\Gamma_C\right|^2\right) = 0.0855 \ \text{W}$$

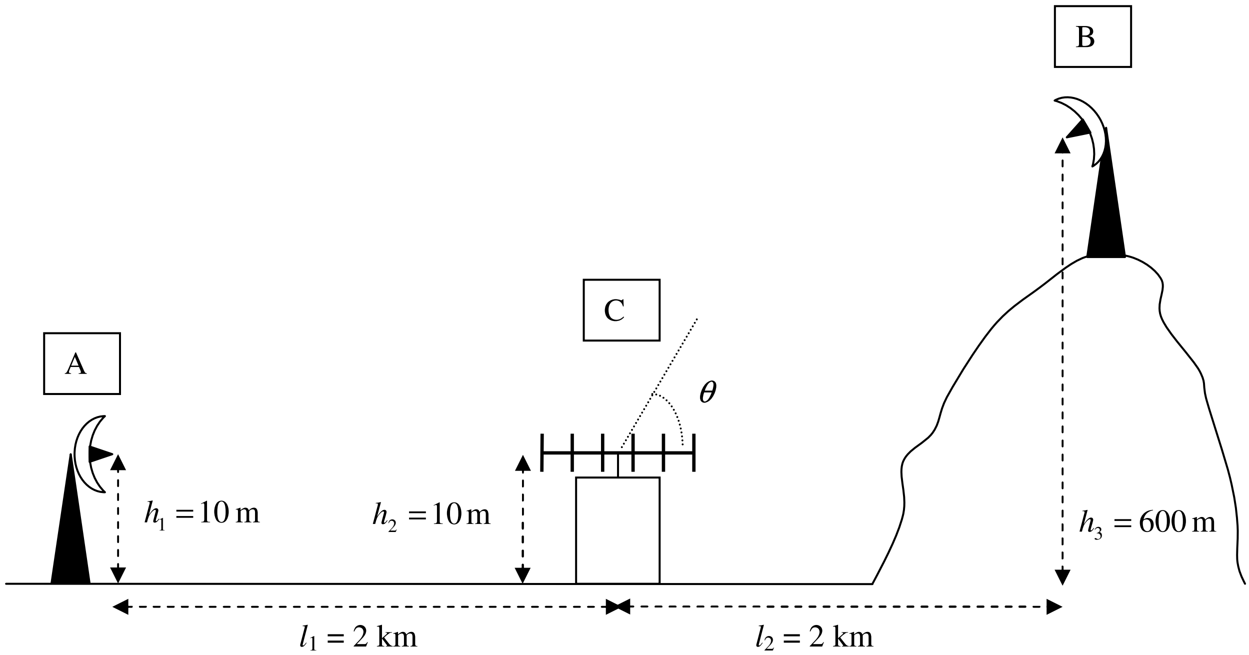
La potenza dissipata sul tratto di linea BB-CC vale dunque:

$$P_l = P_A - P_L = 0.1345 \ \text{W}$$

Esercizio 4

I trasmettitori posti in A e B sono ripetitori del segnale televisivo che offrono copertura all'utente posto in C (si faccia riferimento allo schema sottostante). La frequenza di operazione è 800 MHz e la potenza trasmessa dal trasmettitore in A vale P_{TA} = 1 mW. Entrambe le antenne in A e B hanno guadagno G_1 = 60 dB e sono puntate ottimamente verso l'utente posto in C, la cui antenna invece ha la seguenti caratteristiche: efficienza η = 0.6; funzione di direttività $f_T(\theta)=\left[\dfrac{\cos(90\sin\theta)}{\cos\theta}\right]^2$, direttività D = 2.15 dB.

Determinare P_{TB} (la potenza di trasmissione in B) necessaria perché l'utente in C riceva da B una potenza 3 volte superiore a quella ricevuta da A.



Soluzione:

Si calcoli dapprima la potenza ricevuta in C da A:

$$P_{RA} = P_{TA} G_1 \left(\frac{\lambda}{4\pi l_1}\right)^2 \eta D = 2.19 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

Si consideri ora invece la trasmissione del segnale da B a C. L'angolo di elevazione $\bar{\theta}$ tra C e B si ottiene dalla geometria del problema come:

$$\bar{\theta} = \tan^{-1}\left(\frac{h_3 - h_2}{l_2}\right) = 16.4°$$

mentre la distanza fra le due antenne vale:

$$L = \sqrt{(h_3 - h_2)^2 + (l_2)^2} = 2085.2 \text{ m}$$

La funzione di direttività vale dunque:

$$f_R = 0.886$$

Applicando la formula del link budget si ha:

$$P_{RB} = P_{TB} G_1 \left(\frac{\lambda}{4\pi L} \right)^2 \eta D f_R$$

Invertendo la formula e imponendo che P_{RB} = 3 P_{RA} = $6.57 \cdot 10^{-7}$ W, si ottiene:

$P_{TB} = 3.68$ mW

Esercizio 5 (FACOLTATIVO)

Siano dati i seguenti campi elettrici:

$$\vec{e}_1(t) = 3\cos\left(\pi 10^9 t + \frac{\pi}{6}\right)\vec{u}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{e}_2(t) = 5\cos\left(\pi 10^9 t - \frac{\pi}{5}\right)\vec{u}_x \text{ V/m}$$

Calcolare, nella forma $A\cos(\omega t + \phi)$:

a) $\vec{p}(t) = \vec{e}_2(t) - \vec{e}_1(t)$ V/m

b) $\vec{r}(t) = \vec{e}_2(t)\vec{e}_1(t)$ V/m

Soluzione:

In forma fasoriale:

$$\vec{E}_1 = 3e^{j\frac{\pi}{6}}\vec{\mu}_x = \left[3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\vec{\mu}_x = (2.6 + j1.5)\vec{\mu}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_2 = 5e^{-j\frac{\pi}{5}}\vec{\mu}_x = \left[5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - j5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]\vec{\mu}_x = (4.04 - j2.94)\vec{\mu}_x \text{ V/m}$$

a) $\vec{P} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = (1.45 - j4.44)\vec{\mu}_x$ V/m $\Rightarrow$ $\left|\vec{P}\right| = 4.67$ V/m e $\angle\vec{P} = -1.26\,\text{rad} = -71.95°$

Dunque:

$$\vec{p}(t) = \text{Re}\left[\left|\vec{P}\right|e^{j\omega t}e^{j\angle\vec{P}}\right] = 4.67\cos(\pi 10^9 t - 1.26)\vec{\mu}_x \text{ V/m}$$

b) $\vec{R} = \vec{E}_2\vec{E}_1 = (14.92 \text{ - } j1.57)\vec{\mu}_x$ V/m $\Rightarrow$ $\left|\vec{R}\right| = 15$ V/m e $\angle\vec{R} = -0.1\,\text{rad} = -6°$

Dunque:

$$\vec{r}(t) = \text{Re}\left[\left|\vec{R}\right|e^{j\omega t}e^{j\angle\vec{R}}\right] = 15\cos(\pi 10^9 t - 0.1)\vec{\mu}_x \text{ V/m}$$