Onde Elettromagnetiche e Ottica – Proff C. Capsoni
Prova in itinere del 4 maggio 2010

1	2	3	4	5

non scrivere nella zona soprastante

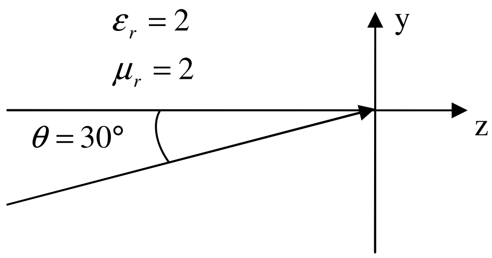
COGNOME E NOME ____

MATRICOLA ____

FIRMA ____

Esercizio 1

Sia data un'onda piana uniforme, il cui vettore d'onda giace sul piano *yz* e forma un angolo θ = 30° con l'asse *z*, si propaga in un mezzo senza perdite con ε_r = 2, μ_r = 2 alla frequenza di 600 MHz. L'onda ha polarizzazione ellittica: la componente di campo elettrico perpendicolare al piano *yz* (TE) ha modulo pari a 3 V/m; la componente di campo elettrico che giace sul piano (TM) ha modulo pari 2 V/m; lo sfasamento fra le due suddette componenti è $\pi/2$.



Per tale onda:

a) determinare l'espressione del vettore di propagazione $\vec{k}$;
b) calcolare la velocità di fase in direzione *z*;
c) scrivere l'espressione del fasore campo elettrico in funzione di *x*, *y* e *z*.

Soluzione:

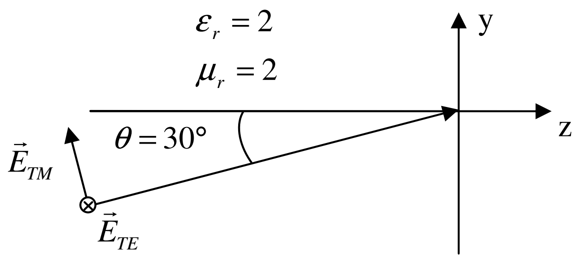
a) Il vettore di propagazione $\vec{k}$ è:

$$\vec{k} = \beta \vec{\mu}_k = 2\pi f \sqrt{\mu\varepsilon}\left(\vec{\mu}_z \cos\theta + \vec{\mu}_y \sin\theta\right) = 21.8\vec{\mu}_z + 12.6\vec{\mu}_y \text{ rad/m}$$

b) La velocità di fase in direzione *z* vale:

$$v_{fz} = \frac{v_f}{\cos\theta} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cos\theta} = 1.73 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

c) Assumendo le componenti TE e TM di campo elettrico rivolte come nella figura sottostante,



si ottiene:

$$\vec{E} = (\vec{E}_{TE} + \vec{E}_{TM}\, e^{j\pi/2})\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left[3\vec{\mu}_x + 2j\left(\vec{\mu}_y \cos(30°) - \vec{\mu}_z \sin(30°)\right)\right] e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left[3\vec{\mu}_x + 2j\left(\vec{\mu}_y \frac{\sqrt{3}}{2} - \vec{\mu}_z \frac{1}{2}\right)\right] e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{E} = \left(3\vec{\mu}_x + j\sqrt{3}\vec{\mu}_y - j\vec{\mu}_z\right) e^{-j(21.8z + 12.6y)} \text{ V/m}$$

Esercizio 2

Scomporre il campo elettrico associato all'onda piana dell'esercizio 1 nelle due componenti ortogonali con polarizzazione circolare (specificare quale è oraria e quale antioraria).

Soluzione:

Il fasore campo elettrico dell'esercizio 1 vale:

$$\vec{E} = 3\vec{\mu}_x + j\sqrt{3}\vec{\mu}_y - j\vec{\mu}_z \text{ V/m}$$

L'espressione di campo elettrico dato dalla somma di due onde polarizzate circolarmente (in senso inverso) deve essere:

$$\vec{E}_{CP} = A\vec{\mu}_{TE} + jA\vec{\mu}_{TM} + B\vec{\mu}_{TE} - jB\vec{\mu}_{TM} \text{ V/m}$$

con:

$$\vec{\mu}_{TE} = \vec{\mu}_x$$

$$\vec{\mu}_{TM} = \vec{\mu}_y \cos\theta - \vec{\mu}_z \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_y - \frac{1}{2}\vec{\mu}_z$$

Quindi, si ottiene:

$$\vec{E}_{CP} = (A+B)\vec{\mu}_x + j\left[(A-B)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_y - \frac{1}{2}\vec{\mu}_z\right)\right] \text{ V/m}$$

Dal confronto di quest'ultima equazione e dell'espressione del campo elettrico dell'esercizio 1 si ottiene dunque (considerando le componenti $\vec{\mu}_x$ e $\vec{\mu}_z$):

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -(A-B)\frac{1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/2 \\ A = 5/2 \end{cases}$$

Dunque:

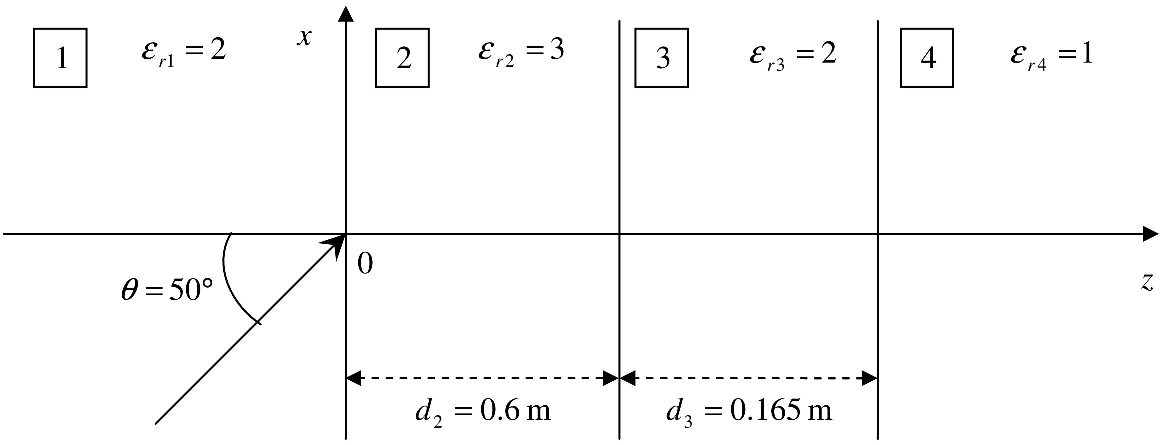
$$\vec{E}_{CP1} = \frac{5}{2}\vec{\mu}_{TE} + j\frac{5}{2}\vec{\mu}_{TM} \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_{CP2} = \frac{1}{2}\vec{\mu}_{TE} - j\frac{1}{2}\vec{\mu}_{TM} \text{ V/m}$$

Quanto hai versi di rotazione, osservando come varia il vettore campo elettrico nel tempo, si deduce che $\vec{E}_{CP1}$ ha polarizzazione sinistra e $\vec{E}_{CP2}$ polarizzazione destra.

Esercizio 3

Un'onda piana uniforme, alla frequenza di 1 GHz e con fasore campo elettrico perpendicolare al piano *xz*, incide sulla struttura multimateriale mostrata in figura ($\varepsilon_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 3$, $\varepsilon_{r3} = 2$, $\varepsilon_{r4} = 1$; materiali non magnetici e senza perdite; angolo di incidenza $\theta = 50°$). La densità di potenza associata all'onda incidente è 10 W/m^2.



Calcolare:

a) la potenza trasmessa nel mezzo 4 in direzione *z*.
b) il coefficiente di riflessione per $z = 0^-$ (cioè relativo al mezzo 1).
c) il fasore campo elettrico totale nel punto (0,0).

Soluzione:

a) Si applica la legge di Snell per identificare gli angoli di propagazione nei vari mezzi:

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 38.72°$

$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \theta_1 = 50°$

$n_1 \sin\theta_1 = n_4 \sin\theta_4 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_4 = 1..0834 \quad \Rightarrow \quad$ onda evanescente

Avendo onda evanescente nel mezzo 4, l'impedenza TE o TM di tale mezzo sarà puramente immaginaria e rimarrà tale anche quando riportata all'interfaccia di ingresso (i mezzi sono tutti senza perdite). A un'impedenza puramente immaginaria è associato sempre un coefficiente di riflessione a modulo unitario, dunque, all'interfaccia di ingresso si ha potenza riflessa totalmente in direzione *z*. Infatti:

$S_{trasm,z} = S_{inc,z}\left(1 - |\Gamma|^2\right) = 0$

con $|\Gamma| = 1$.

b) Per avere il coefficiente di riflessione all'interfaccia nel mezzo 1, bisogna riportare l'impedenza dell'ultimo mezzo a tale interfaccia applicando il modello a linee di trasmissione. Si calcolino innanzitutto le impedenze per i vari mezzi.

$$\eta_{TE}^1 = \eta_{TE}^3 = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos\theta_2} = 414.7 \ \Omega$$

$$\eta_{TE}^2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{\cos\theta_3} = 278.9 \ \Omega$$

$$\eta_{TE}^{4}=\frac{\eta_0}{\cos\theta_4}=\frac{\eta_0}{\sqrt{1-(\sin\theta_4)^2}}=\frac{\eta_0}{\pm\, j0.4167}\Rightarrow\eta_{TE}^{4}=j904.7\ \Omega$$

Nell'ultima espressione si è scelto il segno meno a denominatore (come sempre per il caso TE), per assicurare una soluzione fisica del problema (onda evanescente che si attenua allontanandosi dalla superficie).

Per ottenere le distanze normalizzate:

$$\lambda_{2,z}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{3}}\frac{1}{\cos\theta_2}=0.222\ \text{m}\Rightarrow\overline{d}_2=\frac{d_2}{\lambda_{2,z}}=2.703=2.5+0.203$$

$$\lambda_{3,z}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cos\theta_3}=0.33\ \text{m}\Rightarrow\overline{d}_3=\frac{d_3}{\lambda_{3,z}}=0.5$$

Si definiscano AA, BB e CC rispettivamente le interfacce 3/4, 2/3 e 1/2. Essendo la distanza d_3 corrispondente a un $\lambda_{3,z}/2$, l'impedenza η_{TE}^{4} viene riportata alla sezione BB (giro completo sulla carta di Smith), per cui:

$$\eta_{BB}=\eta_{TE}^{4}=j904.7\ \Omega$$

Per muoversi verso l'interfaccia AA, si usa la carta di Smith:

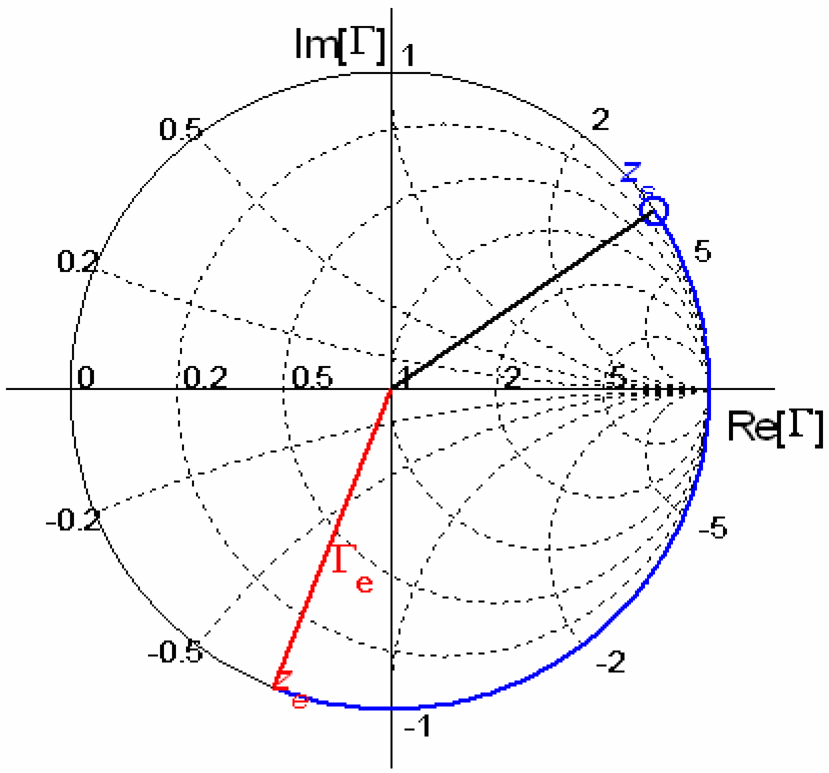
$$\overline{\eta}_{BB}=\frac{\eta_{BB}}{\eta_{TE}^{2}}=j3.24$$

Ruotando di $\overline{d}_2=0.203$ (si parte circa da 0.202) sulla carta come indicato in figura sotto, si ottiene circa:

$$\overline{\eta}_{CC}=-j0.68$$

da cui:

$$\eta_{CC}=\eta_{TE}^{2}\overline{\eta}_{CC}=-j189.9\ \Omega$$



Avendo riportato l'impedenza alla sezione CC, si può calcolare il coefficiente di riflessione nel mezzo 1:

$$\Gamma_{CC} = \frac{\eta_{CC} - \eta_{TE}^{1}}{\eta_{CC} + \eta_{TE}^{1}} = -0.65 - j0.76$$

c) Supponendo un campo TE incidente pari a $\vec{E}_i(0,0) = E_0 \vec{\mu}_y$, si ha il campo totale all'interfaccia pari a:

$$\vec{E}_T(0,0) = \vec{E}_i(0,0) + \vec{E}_r(0,0) = \vec{E}_i(0,0)\left(1 + \Gamma_{CC}\right) \text{ V/m}$$

Il valore E_0 può essere ricavato dalla densità di potenza trasportata dall'onda incidente:

$$\left|E_0\right| = \sqrt{2P\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}} = 73 \text{ V/m}$$

Da cui:

$$\vec{E}_T(0,0) = (25.4010 \ -j55.3474)\vec{\mu}_y$$

Esercizio 4

Per la struttura dell'esercizio 3, calcolare la distanza in z dall'interfaccia tra i mezzi 3 e 4 perché il modulo del campo elettrico risulti attenuato di 20 dB rispetto a quello che si ha sulla suddetta interfaccia.

Soluzione:

Il problema richiede di conoscere il coefficiente di attenuazione dal campo nel mezzo 4 in direzione z associato all'onda evanescente:

$$\beta_{z,4} = \beta_4 \cos\theta_4 = \beta_4 \sqrt{1-(\sin\theta_4)^2} = \pm j \frac{2\pi}{\lambda_0} 0.4167$$

Concordemente con quanto fatto nell'esercizio 3, si sceglie il segno -, da cui:

$$\exp(-j\beta_{z,4}\Delta z) = \exp\left[-j\Delta z\left(-j\frac{2\pi}{\lambda_0}0.4167\right)\right] = \exp(-8.73\Delta z)$$

Per avere l'attenuazione del campo su scala lineare:

$$20\log_{10}\left|\frac{E_4(\Delta z)}{E_4(0.765)}\right| = 20 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{E_4(\Delta z)}{E_4(0.765)}\right| = 0.1$$

Invertendo la seguente formula:

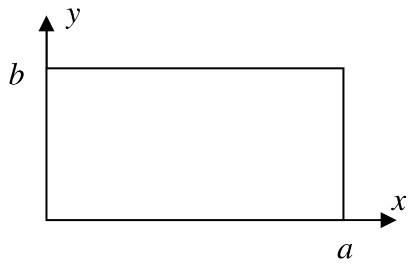
$$|E_4(z)| = |E_4(0.765)|\exp(-8.73\Delta z)$$

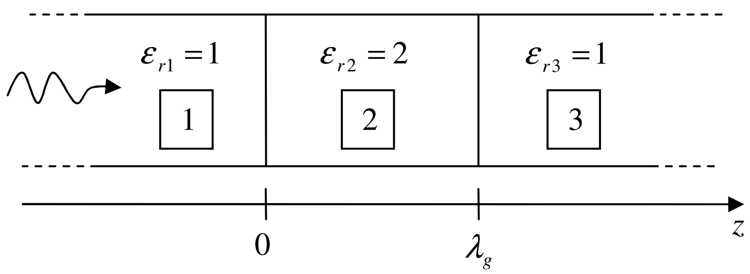
si ricava z:

Δz = 0.2638, da cui z = 0.765+ Δz =1.03 m

Esercizio 5

Sia data una guida d'onda rettangolare con dimensioni a = 10 cm e b = 5 cm. Il modo TE_{10} alla frequenza di f_0 = 2 GHz (potenza associata pari a 10 W) si propaga in guida e incide sulla discontinuità in z = 0 m come indicato in figura.





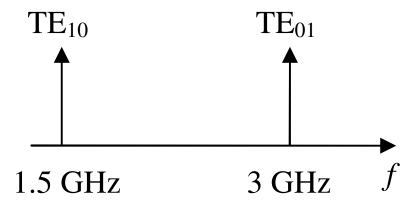
Calcolare:

a) la massima banda monomodale utile intorno alla portante f_0 = 2 GHz,
b) la velocità di gruppo ai limiti della banda utile nel mezzo 1;
c) la lunghezza fisica del mezzo 2 (considerare la frequenza f_0);
d) la frazione di potenza trasmessa nel mezzo 3 (considerare la frequenza f_0);
e) il fasore campo elettrico per $z = \lambda_g + 0.5$ m e $x = \frac{2}{3}a$ m (considerare la frequenza f_0).

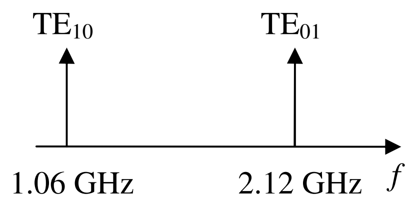
Soluzione:

a) Dato che $b = a/2$, la massima banda monomodale è assicurata e il modo TE_{01} coincide con il TE_{20}. Vanno calcolate le frequenze di taglio dei due modi per i due mezzi.

Per il mezzo **<u>1</u>**:



Per il mezzo **<u>2</u>**:



Dunque la banda monomodale utile intorno alla portante f_0 = 2 GHz è limitata dal mezzo 2 e in particolare vale $2 \cdot (2.12 \cdot 10^9 - 2 \cdot 10^9) = 0.24\,\text{GHz}$.

b) La velocità di gruppo ai limiti della banda utile nel mezzo 1 vale:

$$v_g = \begin{cases} c\sqrt{1-\left(\dfrac{1.5}{2.12}\right)^2} = 2.12\cdot 10^8 \text{ m/s} \\ c\sqrt{1-\left(\dfrac{1.5}{1.88}\right)^2} = 1.81\cdot 10^8 \text{ m/s} \end{cases}$$

c) $\lambda_g = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1.06}{2}\right)^2}} = 0.125 \text{ m}$

Lunghezza fisica del tratto 2 circa pari a 12.5 cm.

d) Essendo il mezzo 2 lungo esattamente λ_g, l'impedenza del mezzo 3 viene riportata alla prima interfaccia così com'è. Il coefficiente di riflessione alla prima interfaccia è dunque nullo e tutta la potenza passa al mezzo 3.

e) Dalla potenza associata al modo TE_{10} si ricava il modulo del campo elettrico a centro guida:

$$|E_0| = \sqrt{\frac{4\eta^1_{TE10}P}{a\,b}} = 2.14 \text{ kV/m}$$

con:

$$\eta^1_{TE\,10} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1.5}{2}\right)^2}} = 570 \quad \Omega$$

Essendo il mezzo 2 lungo esattamente λ_g, il campo trasmesso nel mezzo 3 è uguale al campo incidente sulla prima interfaccia. Resta da calcolare la costante di propagazione in guida nel mezzo 3:

$$\beta_{3,z} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-\left(\frac{1.5}{2}\right)^2} = 27.7 \text{ rad/m}$$

Il campo nella posizione richiesta vale dunque:

$$\vec{E}_3(z = \lambda_g + 0.5, x = \frac{2}{3}a) = E_0 \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\exp(-j27.7\cdot 0.625) = 62.5 + j1852.2 \text{ V/m}$$