Onde Elettromagnetiche e Ottica – Prof. C. Capsoni
Prova in itinere del 28 giugno 2010

1	2	3

non scrivere nella zona soprastante

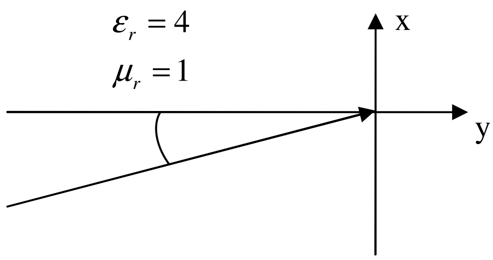
COGNOME E NOME ____________________

MATRICOLA ____________________

FIRMA ____________________

Esercizio 1

Sia data un'onda piana uniforme, il cui vettore d'onda giace sul piano *xy*, che si propaga in un mezzo senza perdite con $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ (fare riferimento alla figura sottostante).



L'espressione del campo elettrico associato all'onda è:

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(2e^{j\frac{\pi}{4}}\vec{\mu}_z + \sqrt{3}\vec{\mu}_x - \vec{\mu}_y \right) e^{-j8\pi\left(\sqrt{3}y + x\right)} \qquad \text{[V/m]}$$

Per tale onda, determinare:

a) la direzione e il verso di propagazione;
b) la frequenza;
c) l'espressione del campo magnetico;
d) il tipo di polarizzazione (specificare anche, in caso, se destra o sinistra);
e) la densità di potenza trasportata dall'onda in direzione di propagazione.

Soluzione:

a) e b) La direzione e il verso di propagazione dell'onda, così come la sua frequenza, discendono dal seguente confronto:

$$e^{-j8\pi\left(\sqrt{3}y+x\right)} = e^{-j\beta\left(\cos(\theta)y + \sin(\theta)x\right)}$$

da cui:

$$\begin{cases}\beta\cos(\theta)=8\sqrt{3}\pi \\ \beta\sin(\theta)=8\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tan(\theta)=1/\sqrt{3} \\ \dfrac{2\pi f}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\sin(\theta)=8\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta=30° \\ f=\dfrac{8c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=1.2\ GHz\end{cases}$$

c) Il campo magnetico si può calcolare separatamente per le 2 componenti TE e TM del campo elettrico.

Per la componente TE di campo elettrico ($2e^{j\frac{\pi}{4}}\vec{\mu}_z$), sarà:

$$\vec{H}_{TE}=\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{\eta}\left(\cos(\theta)\vec{\mu}_x-\sin(\theta)\vec{\mu}_y\right)=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{\eta}\left(\sqrt{3}\vec{\mu}_x-\vec{\mu}_y\right) \quad \text{[A/m]}$$

con $\eta=\eta_0\sqrt{\mu_r}/\sqrt{\varepsilon_r}=188.5\ \Omega$

Per la componente TM di campo elettrico ($\sqrt{3}\vec{\mu}_x-\vec{\mu}_y$), sarà:

$$\vec{H}_{TM}=-\frac{2}{\eta}\vec{\mu}_z \quad \text{[A/m]}$$

Il campo magnetico totale sarà dunque:

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{3}\vec{\mu}_x-\vec{\mu}_y\right)-2\vec{\mu}_z\right)e^{-j8\pi\left(\sqrt{3}y+x\right)} \quad \text{[A/m]}$$

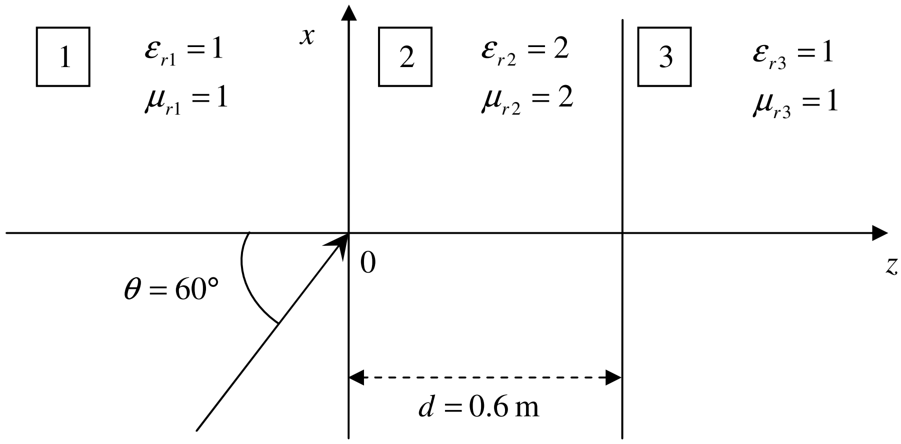
d) I moduli della componente TE e TM di campo elettrico valgono entrambi 2 V/m, ma le due componenti sono sfasate di $\pi/4$, dunque la polarizzazione risultante è ellittica, in particolare con rotazione oraria (destra).

e) La densità di potenza totale S in direzione di propagazione è la somma delle densità di potenza associate alle 2 componenti TE e TM (essendo esse ortogonali), ossia:

$$S=\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_{TE}\right|^2}{\eta}+\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_{TM}\right|^2}{\eta}=2\frac{1}{2}\frac{4}{\eta}=\frac{4}{\eta}=21.2\ \text{mW/m}^2$$

Esercizio 2

Un'onda piana, alla frequenza di 1 GHz e il cui vettore di propagazione giace sul piano *xz*, incide sulla struttura multimateriale mostrata in figura ($\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1$ e $\mu_{r1} = \mu_{r3} = 1, \varepsilon_{r2} = 2$ e $\mu_{r2} = 2$; materiali senza perdite; angolo di incidenza $\theta = 60°$).



Il valore del vettore fasore campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento vale:

$$\vec{E}(0,0,0) = j\vec{\mu}_y + \frac{1}{2}\vec{\mu}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_z \qquad \text{[V/m]}$$

Calcolare:

a) la densità di potenza trasmessa nel mezzo 3 in direzione *z*;
b) il coefficiente di riflessione complessivo per $z = 0^-$ (cioè relativo al mezzo 1, ma rappresentativo di tutta la struttura);
c) la polarizzazione dell'onda riflessa nel mezzo 1;
d) il vettore fasore campo elettrico totale nel punto P(*x* = 1, *y* = 1, *z* = -1).

Soluzione:

Dall'espressione del campo elettrico nell'origine si può dedurre che l'onda è polarizzata circolarmente, conviene dunque considerare separatamente le componenti TE e TM.

<u>Componente TE:</u>

a) La componente TE del campo elettrico è diretta come $\vec{\mu}_y$. Per rispondere alla domanda a) è necessario calcolare il coefficiente di riflessione rappresentativo di tutta la struttura. Per fare ciò si calcolano innanzitutto gli angoli di propagazione nei vari mezzi:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 25.66°$$
$$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \theta_1 = 60°$$

le impedenze caratteristiche TE associate ai mezzi:

$$\eta_{TE}^1 = \eta_{TE}^3 = \frac{\eta_0}{\cos(\theta_1)} = 754\ \Omega$$

$$\eta_{TE}^2 = \eta_0 \frac{\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \frac{1}{\cos(\theta_2)} = 418.25\ \Omega$$

La lunghezza d'onda nel mezzo 2 in direzione z, necessaria per applicare l'equivalente a linee di trasmissione, vale:

$$\lambda_{2,z} = \frac{\lambda_2}{\cos(\theta_2)} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\,\cos(\theta_2)} = 0.166\ \text{m}$$

Passando sulla carta di Smith, si normalizzano la lunghezza d e l'impedenza η_{TE}^3 (si definiscano AA e BB rispettivamente le interfacce 2/3 e 1/2)

$$\bar{d} = \frac{d}{\lambda_{2,z}} = 3.615 = 3.5 + 0.115$$

$$\bar{\eta}_{AA} = \frac{\eta_{TE}^3}{\eta_{TE}^2} \approx 1.8$$

Ruotando in senso orario sulla carta di Smith si porta tale impedenza normalizzata alla sezione BB. Dalla carta si ottiene:

$$\bar{\eta}_{BB} \approx 0.9 - j0.55 \quad \Rightarrow \quad \eta_{BB} = \bar{\eta}_{BB}\eta_{TE}^2 = 376.4 - j230\ \Omega$$

Si può dunque calcolare il coefficiente di riflessione visto dall'onda TE all'interfaccia BB:

$$\Gamma_{TE} = \frac{\eta_{BB} - \eta_{TE}^1}{\eta_{BB} + \eta_{TE}^1} = \text{-0.28 -}j\ 0.26$$

Per la componente TE, la densità di potenza trasmessa nel mezzo 3 in direzione z vale:

$$S_{TE}^3 = S_i \cos(\theta_1)\left(1 - |\Gamma_{TE}|^2\right) = \frac{1}{2}\frac{|E_{TE}|^2}{\eta_0}\cos(\theta_1)\left(1 - |\Gamma_{TE}|^2\right) \approx 5.7 \cdot 10^{-4}\ \ \text{W/m}^2$$

Lo stesso procedimento si applica alla componente TM del campo elettrico, facendo attenzione a cambiare le espressioni per il calcolo delle impedenze intrinseche.

$$\eta_{TM}^1 = \eta_{TM}^3 = \eta_0 \cos(\theta_1) = 188.5\ \Omega$$

$$\eta_{TM}^2 = \eta_0 \frac{\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \cos(\theta_2) = 339.82\ \Omega$$

$$\bar{\eta}_{AA} = \frac{\eta_{TM}^3}{\eta_{TM}^2} \approx 0.55$$

Ruotando sulla carta si ottiene in questo caso:

$$\bar{\eta}_{BB} \approx 0.8 + j0.5 \quad \Rightarrow \quad \eta_{BB} = \bar{\eta}_{BB}\eta_{TM}^2 = 271.9 + j169.9\ \Omega$$

Da cui:

$$\Gamma_{TM} = \frac{\eta_{BB} - \eta_{TM}^1}{\eta_{BB} + \eta_{TM}^1} = 0.28\ + j\ 0.26$$

$$S_{TM}^3 = S_i \cos(\theta_1)\left(1 - |\Gamma_{TM}|^2\right) = \frac{1}{2}\frac{|E_{TM}|^2}{\eta_0}\cos(\theta_1)\left(1 - |\Gamma_{TM}|^2\right) \approx 5.7 \cdot 10^{-4}\ \ \text{W/m}^2$$

La densità di potenza totale nel mezzo 3 in direzione z è dunque:

$$S^3 = S_{TE}^3 + S_{TM}^3 = 11.4 \cdot 10^{-4}\ \ \text{W/m}^2$$

b) Il coefficiente di riflessione per $z = 0^-$ è già stato calcolato per entrambe le componenti al punto precedente: $\Gamma_{TE} = \text{-0.28 -}j\ 0.26$ e $\Gamma_{TM} = 0.28\ + j\ 0.26$

c) Il campo elettrico riflesso totale nel mezzo 1, nell'origine degli assi, vale:

$$\vec{E}^r = \vec{E}^r_{TE} + \vec{E}^r_{TM} = \vec{E}^i_{TE}\Gamma_{TE} + \vec{E}^i_{TM}\Gamma_{TM} = j\vec{\mu}_y(\text{-}0.28\ \text{-}j\ 0.26) + \left(\frac{1}{2}\vec{\mu}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_z\right)(0.28\ + j\ 0.26)\ \ \text{V/m}$$

Osservando le caratteristiche delle 2 componenti, si ha:

$$\left|\vec{E}^r_{TE}\right| = 0.382\ \ \text{V/m} \quad \text{e} \quad \angle\vec{E}^r_{TE} = -47.12°$$

$$\left|\vec{E}^r_{TM}\right| = 0.382\ \ \text{V/m} \quad \text{e} \quad \angle\vec{E}^r_{TM} = 42.88°$$

Lo sfasamento fra le due componenti vale $\Delta\phi = \angle\vec{E}^r_{TM} - \angle\vec{E}^r_{TE} = 90°$. Considerando che i moduli delle due componenti sono uguali, l'onda riflessa sarà dunque polarizzata circolarmente.

d) L'espressione del campo elettrico totale nel mezzo 1, somma di campo incidente e riflesso, è:

$$\vec{E}_T(x,y,z) = \vec{E}^i(x,y,z) + \vec{E}^r(x,y,z) = \left[j\vec{\mu}_y + \frac{1}{2}\vec{\mu}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_z \right] e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(\cos(\theta_1)z+\sin(\theta_1)x)} +$$

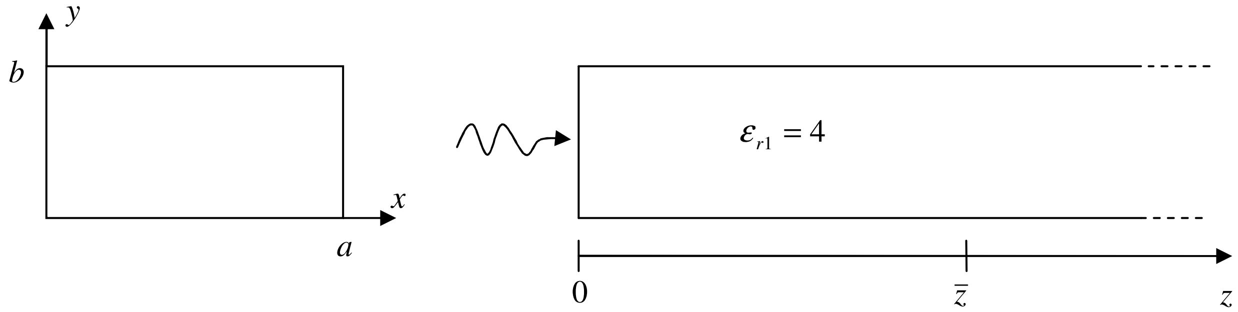
$$+ \left[j\vec{\mu}_y(\text{-}0.28\ \text{-}j\ 0.26) + \left(\frac{1}{2}\vec{\mu}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_z\right)(0.28\ + j\ 0.26) \right] e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(-\cos(\theta_1)z+\sin(\theta_1)x)}$$

Il campo nel punto P(x = 1, y = 1, z = -1) varrà dunque ($\lambda_0 = c/f = 0.3$):

$$\vec{E}_T(1,1,-1) = (0.83 + j0.54)\vec{\mu}_x - (0.08 + j0.57)\vec{\mu}_y + (j0.7\text{-}0.44\ )\vec{\mu}_z\ \ \text{V/m}$$

Esercizio 3

Sia data una guida d'onda rettangolare con dimensioni a e b incognite. Dimensionare la guida perché la frequenza più bassa utilizzabile sia 3 GHz e perché si abbia la massima banda monomodale possibile.



Una volta dimensionata la guida, si consideri un modo TE_{10} alla frequenza di 2 GHz: determinare il vettore fasore campo elettrico al centro della guida ($x = a/2$ e $y = b/2$) per $\bar{z} = 10$ cm, sapendo che esso vale 10 V/m all'ingresso della guida ($x = a/2$ e $y = b/2$, $z = 0$ cm). Infine si calcoli la potenza trasportata dal suddetto modo nel punto $\bar{z} = 10$ cm.

Soluzione:

La frequenza più bassa utilizzabile in guida è associata al modo TE_{10}, la cui frequenza di taglio è:

$$f_c = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = 3 \text{ GHz} \rightarrow a = \frac{c}{2f_c\sqrt{\varepsilon_r}} = 0.025 \text{ m}$$

Per avere la massima banda monomodale possibile, deve essere:

$b = a/2 = 0.0125$ m

Si consideri ora il modo TE_{10} alla frequenza di $f = 2$ GHz. Essendo la sua frequenza inferiore alla frequenza di taglio, la propagazione è inibita e si ha evanescenza, il cui coefficiente di attenuazione vale:

$$\gamma = jk\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = j\frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_r}(\pm j1.12)$$

Dovendo ottenere un'attenuazione del campo applicando $\exp(-\gamma z) = \exp(-j\beta z)$, è necessario scegliere il segno meno, cosicché si ottiene:

$$\gamma = j\frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_r}(-j1.12) = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_r}(1.12) = 93.8\, Np/m = \alpha$$

Il vettore fasore campo elettrico al centro della guida ($x = a/2$ e $y = b/2$) per $\bar{z} = 10$ cm vale dunque ($E_0 = 10$ V/m):

$$\vec{E}(z = \bar{z}, x = a/2, y = b/2) = E_0 \sin(\pi/2)\exp(-\alpha\,\bar{z}) = 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ V/m}$$

La potenza trasportata in guida dal suddetto modo è nulla perché è un modo evanescente.