Onde Elettromagnetiche e Ottica (Mod 1) – Prof. C. Capsoni
Prova del 16 luglio 2010

1	2	3

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ____________________

MATRICOLA ____________________

FIRMA ____________________

Esercizio 1

Sia data un'onda piana uniforme che si propaga nel vuoto. Il campo magnetico associato all'onda ha la seguente espressione:

$$\vec{H}(x,y,z) = \left(\sqrt{3}\vec{\mu}_x + \vec{\mu}_z + 2\vec{\mu}_y\right)e^{-j8\pi\left(\sqrt{3}z - x\right)} \qquad [\text{mA/m}]$$

Per tale onda, determinare:

a) la direzione (ossia l'angolo rispetto a un dato sistema di riferimento cartesiano) e il verso di propagazione;
b) la frequenza;
c) l'espressione del campo elettrico associato;
d) la densità di potenza trasportata dall'onda in direzione di propagazione;
e) FACOLTATIVO: il tipo di polarizzazione (se circolare o ellittica, indicare se destra o sinistra; se lineare, indicare l'angolo rispetto al piano su cui giace il vettore propagazione).

Soluzione:

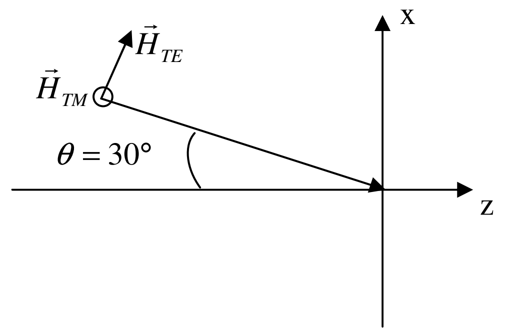
a) e b) La direzione e il verso di propagazione dell'onda, così come la sua frequenza, discendono dal seguente confronto:

$$e^{-j8\pi\left(\sqrt{3}z - x\right)} = e^{-j\beta\left(\cos(\theta)z + \sin(\theta)x\right)}$$

da cui:

$$\begin{cases} \beta\cos(\theta) = 8\sqrt{3}\pi \\ \beta\sin(\theta) = -8\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan(\theta) = -1/\sqrt{3} \\ \dfrac{2\pi f}{c}\sin(\theta) = -8\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = -30° \\ f = 8c = 2.4\ GHz \end{cases}$$

Dunque, tenendo conto di questi risultati, la geometria del problema è la seguente:



Si noti che il segno meno trovato indica che l'onda si propaga nel verso negativo di x. Si noti inoltre che sono state indicate come $\vec{H}_{TE}$ e $\vec{H}_{TM}$, rispettivamente la componente di $\vec{H}$ che giace sul piano xz (ed è quindi associata a un campo elettrico TE) e che è ortogonale al piano xz (ed è quindi associata a un campo elettrico TM).

c) Il campo elettrico associato si può calcolare separatamente per le 2 componenti di $\vec{H}$.
Per $\vec{H}_{TE} = \sqrt{3}\vec{\mu}_x + \vec{\mu}_z$ mA/m (il cui modulo vale 2):

$$\vec{E}_{TE} = -2 \cdot 10^{-3} \eta_0 \vec{\mu}_y = 0.754 \vec{\mu}_y \quad \text{[V/m]}$$

con $\eta_0 \approx 377\ \Omega$

$\vec{H}_{TM} = 2\vec{\mu}_y$ mA/m (il cui modulo vale ancora 2):

$$\vec{E}_{TM} = 2 \cdot 10^{-3} \eta_0 \left(\cos 30° \, \vec{\mu}_x + \sin 30° \, \vec{\mu}_z\right) = 0.653 \vec{\mu}_x + 0.377 \, \vec{\mu}_z \quad \text{[V/m]}$$

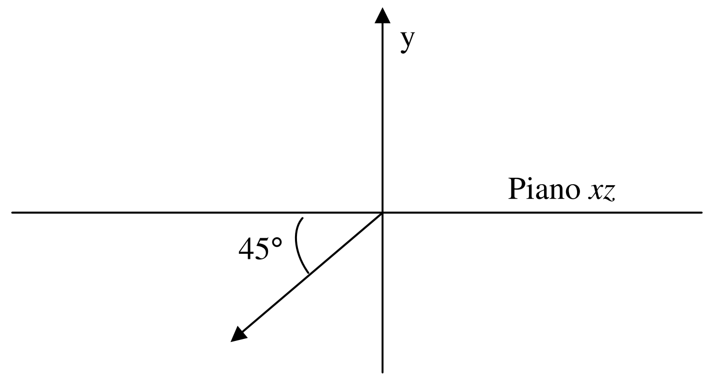
Il campo elettrico totale sarà dunque:

$$\vec{E} = \left(0.653 \vec{\mu}_x + 0.377 \, \vec{\mu}_z + 0.754 \vec{\mu}_y\right) e^{-j8\pi\left(\sqrt{3}z - x\right)} \quad \text{[V/m]}$$

d) La densità di potenza totale S in direzione di propagazione è la somma delle densità di potenza associate alle 2 componenti TE e TM (essendo esse ortogonali), ossia:

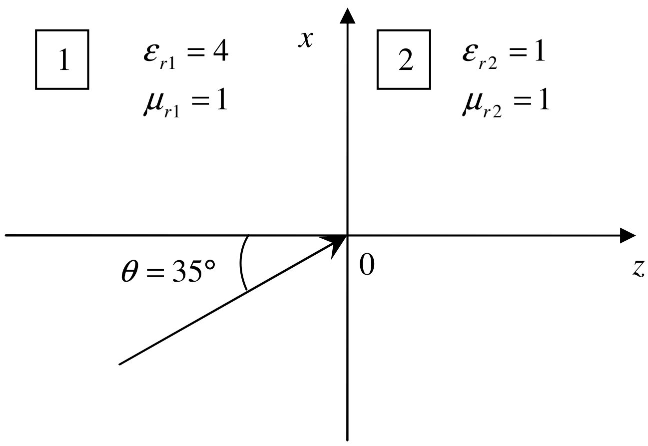
$$S = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_{TE}\right|^2}{\eta} + \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{E}_{TM}\right|^2}{\eta} = 1.5 \ \text{mW/m}^2$$

e) FACOLTATIVO: I moduli della componente TE e TM di campo elettrico valgono entrambi 0.754 V/m ed oscillano in fase, per cui la polarizzazione sarà lineare con un angolo di 45° rispetto al piano xz, come mostrato in figura:



Esercizio 2

Un'onda piana, alla frequenza di 1 GHz e il cui vettore di propagazione giace sul piano *xz*, incide sulla discontinuità mostrata in figura.



Il valore del vettore fasore campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento vale:

$$\vec{E}(0,0,0) = j\vec{\mu}_y \qquad [\text{V/m}]$$

Calcolare:

a) il coefficiente di riflessione all'interfaccia;
b) la densità di potenza trasmessa nel mezzo 2 in direzione *z*;
c) il vettore fasore campo elettrico totale nel mezzo 1.

Soluzione:

a) L'onda in questione è TE. Si determina innanzitutto l'angolo di rifrazione:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_2 = 1.1472 \quad \Rightarrow \quad \text{onda evanescente}$$

Si determinano a questo punto le impedenze caratteristiche dei mezzi per un onda TE:

$$\eta_{TE}^1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{4}} \frac{1}{\cos\theta_1} = 230.1\ \Omega$$

$$\eta_{TE}^2 = \frac{\eta_0}{\cos\theta_2} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(\sin\theta_2)^2}} = \frac{\eta_0}{\pm j0.5622} \Rightarrow \eta_{TE}^2 = j670.6\,\Omega$$

Nell'ultima espressione si è scelto il segno meno a denominatore (come sempre per il caso TE), per assicurare una soluzione fisica del problema (onda evanescente che si attenua allontanandosi dalla superficie).
Il coefficiente di riflessione vale dunque:

$$\Gamma = \frac{\eta_{TE}^2 - \eta_{TE}^1}{\eta_{TE}^2 + \eta_{TE}^1} = 0.789 + j0.614$$

b) Considerando che l'onda è evanescente, la densità di potenza trasmessa nel mezzo 2 in direzione z è nulla (infatti $|\Gamma| = 0$).

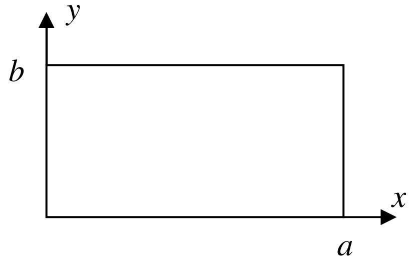
c) Nel mezzo 1, il campo elettrico totale è somma del campo incidente e del campo riflesso:

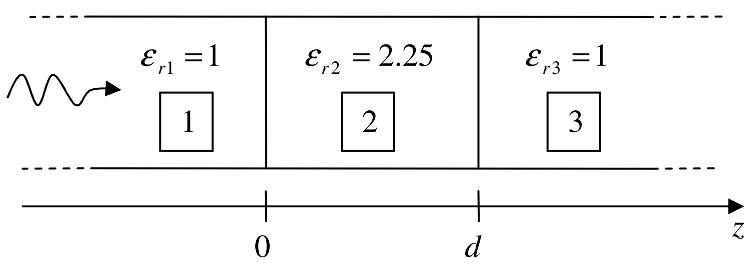
$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_i(x, y, z) + \vec{E}_r(x, y, z) = j\vec{\mu}_y e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\cos(\theta)z + \sin(\theta)x)} + \Gamma\left(j\vec{\mu}_y\right)e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(-\cos(\theta)z + \sin(\theta)x)} \text{ V/m}$$

con $\lambda = c/\left(\sqrt{4}f\right) = 0.15$ m.

Esercizio 3

Sia data una guida d'onda rettangolare con dimensioni $a = 7$ cm e $b = 4$ cm. La guida è riempita di un materiale con $\varepsilon_{r2} = 2.25$ per una lunghezza $d = \lambda_{g,2}$ ($\lambda_{g,2}$ è la lunghezza d'onda in guida nel mezzo 2, relativa alla frequenza f_0 definita nel punto a) di seguito).





Per tale guida:

a) determinare f_0, la frequenza centrale della banda monomodale della guida;
b) determinare la posizione (in funzione di x, y e z) e il valore del massimo modulo del campo elettrico nel mezzo 3, nel caso in cui la potenza trasportata dal modo TE_{10} alla frequenza f_0 incidente all'interfaccia $z = 0$ sia $P = 10$ W (assumere nulla la fase del fasore campo elettrico $z = 0$);
c) determinare quanto vale d in metri.

Soluzione:

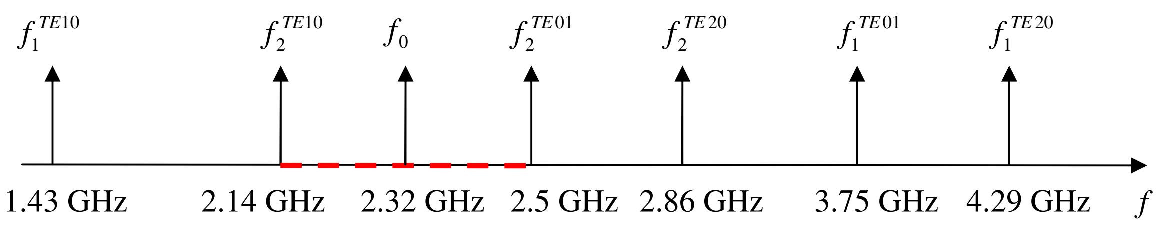
a) I modi che determinano la banda monomodale sono il TE_{10}, il TE_{20} e il TE_{01}. Per il mezzo 1 e il mezzo 3:

$$f_1^{TE10} = \frac{c}{2a} = 2.14 \text{ GHz} \qquad f_1^{TE01} = \frac{c}{2b} = 3.75 \text{ GHz} \qquad f_1^{TE20} = \frac{c}{a} = 4.29 \text{ GHz}$$

Per il mezzo 2:

$$f_2^{TE10} = \frac{c}{2a\sqrt{2.25}} = 1.43 \text{ GHz} \qquad f_2^{TE01} = \frac{c}{2b\sqrt{2.25}} = 2.5 \text{ GHz} \qquad f_2^{TE20} = \frac{c}{a\sqrt{2.25}} = 2.86 \text{ GHz}$$

Considerando tutta la struttura si ottiene dunque:



Determinata la banda monomodale (segnata col tratteggio rosso), si ottiene f_0 = 2.32 GHz.

b) Dalla potenza associata al modo TE_{10} si ricava il modulo del campo elettrico a centro guida:

$$|E_0| = \sqrt{\frac{4\eta_1^{TE10} P}{a\,b}} = 3.7 \text{ kV/m}$$

con: $\eta_1^{TE10} = \dfrac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2.14}{2.32}\right)^2}} = 976.2\,\Omega$

Considerando nulla la fase del vettore fasore campo elettrico incidente in z = 0, il campo massimo incidente lo si ha per $x = a/2$ = 3.5 cm e vale:

$$\vec{E}_i(x = a/2, y, z = 0) = 3.7\vec{\mu}_y \text{ kV/m}$$

Essendo il mezzo 2 lungo esattamente $\lambda_{g,2}$, il campo trasmesso nel mezzo 3 è uguale al campo incidente sulla prima interfaccia:

$$\vec{E}_3(x = a/2, y, z = d) = \vec{E}_i(x = a/2, y, z = 0) = 3.7\vec{\mu}_y \text{ kV/m}$$

Dunque, il massimo modulo del campo elettrico nel mezzo 3 si ottiene ancora per x = 3.5 cm e per qualsiasi valore di y e $z > d$ (solo presenza di onda diretta nel mezzo 3).

c) Per ottenere il valore di d in metri:

$$d = \lambda_{g,2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2.25}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1.43}{2.32}\right)^2}} = 0.109 \text{ m}$$