Onde Elettromagnetiche e Ottica (Mod 1) – Prof. C. Capsoni
Prova del 3 settembre 2010

1	2	3

non scrivere nella zona soprastante

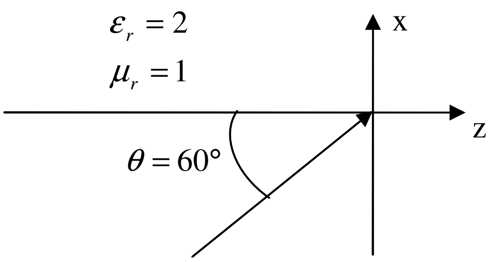
COGNOME E NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

FIRMA ______________________________

Esercizio 1

Sia data un'onda piana uniforme il cui vettore d'onda giace sul piano xz e forma un angolo $\theta = 60°$ con l'asse z. L'onda si propaga in un dielettrico non perfetto ($\varepsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 0.1$ S/m) alla frequenza di 800 MHz. L'onda ha componente di campo elettrico solo perpendicolare al piano xz (uscente dal foglio) il cui modulo vale 3 V/m (assumere fase nulla per $z = 0$).



Per tale onda:

a) determinare l'espressione del vettore di propagazione $\vec{k}$;
b) calcolare la velocità di fase in direzione di propagazione;
c) scrivere l'espressione del fasore campo elettrico e campo magnetico in funzione di x, y e z.

Soluzione:

a) Il mezzo è con perdite, per cui il vettore di propagazione sarà complesso (si noti che $\tan\delta = \sigma/(\omega\varepsilon) = 1.1235$ e dunque non si possono applicare le semplificazioni né di buon dielettrico, né di buon conduttore):

$$\left|\vec{k}\right| = \beta - j\alpha = \sqrt{-j\omega\mu\left(j\omega\varepsilon + \sigma\right)} = 26.5 \text{ -}j11.9 \quad \text{1/m}$$

Dunque l'espressione del vettore di propagazione sarà:

$$\vec{k} = (26.5 \text{ -}j11.9)\left(\vec{\mu}_z \cos(\theta) + \vec{\mu}_x \sin(\theta)\right) = \frac{1}{2}(26.5 \text{ -}j11.9)\vec{\mu}_z + \frac{\sqrt{3}}{2}(26.5 \text{ -}j11.9)\vec{\mu}_x \quad \text{1/m}$$

b) La velocità di fase in direzione di propagazione vale:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = 1.89 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

c) L'espressione del campo elettrico vale:

$$\vec{E}(x, y, z) = 3\vec{\mu}_y \, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = 3\vec{\mu}_y \, e^{-j\left[\frac{1}{2}(26.5 \; -j11.9)z + \frac{\sqrt{3}}{2}(26.5 \; -j11.9)x\right]} \quad \text{V/m}$$

Per il calcolo del campo magnetico bisogna passare attraverso l'impedenza caratteristica del mezzo che risulta in questo caso essere complessa:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} = 198.2 \; + j8.9 \quad \Omega$$

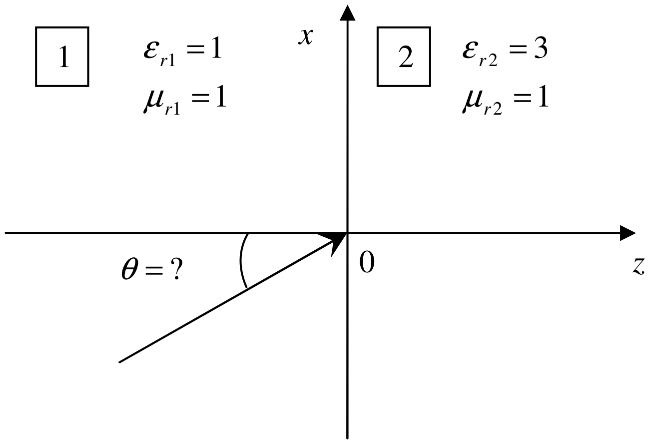
Da cui:

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{3}{\eta}\left(\sin(\theta)\vec{\mu}_z - \cos(\theta)\vec{\mu}_x\right)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left(-12.6 \; + j5.7\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mu}_z - \frac{1}{2}\vec{\mu}_x\right)\vec{\mu}_x \, e^{-j\left[\frac{1}{2}(26.5 \; -j11.9)z + \frac{\sqrt{3}}{2}(26.5 \; -j11.9)x\right]}$$

mA/m

Esercizio 2

Un'onda piana uniforme, alla frequenza di 1 GHz e il cui vettore di propagazione giace sul piano *xz*, incide sulla discontinuità mostrata in figura.



L'onda incidente è polarizzata circolarmente, trasporta una densità di potenza pari a 10 W/m^2 e incide sulla discontinuità all'angolo di Brewster.
Determinare:

a) gli angoli di incidenza, di riflessione e di trasmissione;
b) i coefficienti di riflessione TE e TM all'interfaccia;
c) la polarizzazione dell'onda riflessa e quella dell'onda trasmessa.

Soluzione:

a) L'angolo di Brewster, che è poi l'angolo di incidenza, vale:

$$\theta_B = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}}\right) = 60°$$

L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza secondo la legge di Snell, che fornisce anche l'angolo trasmesso:

$$n_1 \sin(\theta_B) = n_2 \sin(\theta_T) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_T) = \sin(\theta_B)/\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_T = 30°$$

b) Essendoci incidenza all'angolo di Brewster, la componente TM dell'onda non viene riflessa e dunque $\Gamma_{TM} = 0$. Per quanto riguarda la componente TE:

$$\eta_1^{TE} = \frac{\eta_0}{\cos(\theta_B)} = 754\ \Omega$$

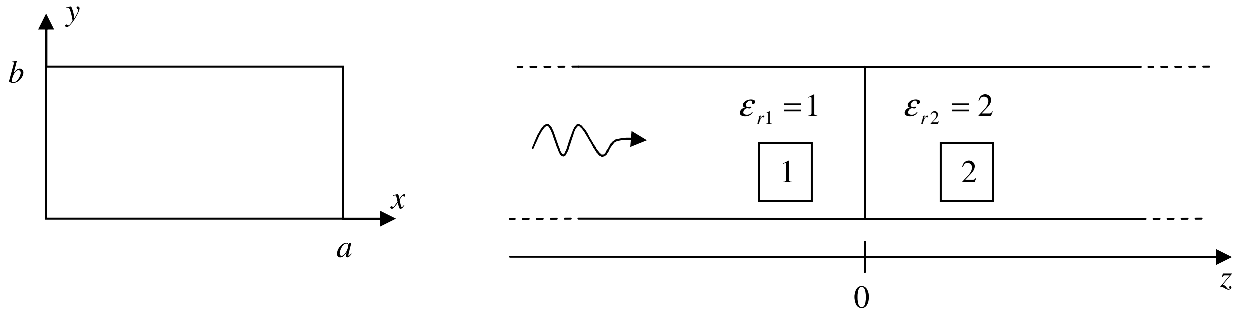
$$\eta_2^{TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{3}\cos(\theta_T)} = 251.3\ \Omega$$

$$\Gamma_{TE} = \frac{\eta_2^{TE} - \eta_1^{TE}}{\eta_2^{TE} + \eta_1^{TE}} = -0.5$$

c) L'onda riflessa è costituita da una sola componente TE e dunque la sua polarizzazione è lineare. La polarizzazione dell'onda trasmessa è invece ellittica dato che è composta da entrambe le componenti TE eTM, ma con modulo differente.

Esercizio 3

Sia data una guida d'onda rettangolare con dimensioni a = 8 cm e b = 4 cm. Parte della guida è riempita di un materiale con $\varepsilon_{r2} = 2$ come mostrato in figura.



Per tale guida:

a) calcolare la banda monomodale;
b) determinare i modi (non evanescenti) associati a un'onda che si propaga alla frequenza f = 5.5 GHz;
c) calcolare la massima lunghezza d'onda tra i modi determinati al punto b) (nel mezzo 1);
d) calcolare la massima velocità di gruppo tra i modi determinati al punto b) (nel mezzo 1).

Soluzione:

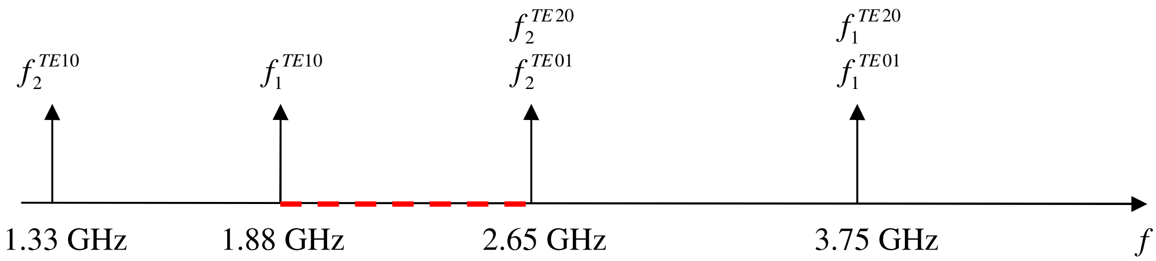
a) I modi che determinano la banda monomodale sono il TE_{10}, il TE_{20} e il TE_{01}. Per il mezzo 1 e il mezzo 3:

$$f_1^{TE10} = \frac{c}{2a} = 1.88 \text{ GHz} \qquad f_1^{TE01} = f_1^{TE20} = \frac{c}{2b} = 3.75 \text{ GHz}$$

Per il mezzo 2:

$$f_2^{TE10} = \frac{c}{2a\sqrt{2}} = 1.33 \text{ GHz} \qquad f_2^{TE01} = f_2^{TE20} = \frac{c}{2b\sqrt{2}} = 2.65 \text{ GHz}$$

Considerando tutta la struttura si ottiene dunque:



La banda monomodale (segnata col tratteggio rosso sopra) va dunque da 1.88 GHz a 2.65 GHz ed ha ampiezza 0.77 GHz.

b) I modi che si propagano in guida sono quelli associati a una frequenza di taglio inferiore a quella del segnale (5.5 GHz in questo caso). La formula che permette di calcolare le frequenze di taglio dei vari modi è la seguente:

$$f_C = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}$$

m e *n* sono gli indici del modo. Ricordando che i non esistono modi TM con almeno uno degli indici nulli, i modi TE sono i primi che si propagano in guida. Applicando ripetutamente la formula soprastante incrementando gli indici *n* e *m* di un unità si può verificare che per i seguenti modi presentano una frequenza di taglio inferiore a 5.5 GHz:

Mezzo 1 → TE_{10} TE_{01} TE_{20} TE_{11} TE_{21}
TM_{11} TM_{21}

Mezzo 2 → TE_{10} TE_{01} TE_{20} TE_{02} TE_{11} TE_{12} TE_{21}
TM_{11} TM_{12} TM_{21}

I modi quindi che si propagano lungo tutta la guida sono i modi riportati sopra per il mezzo 1.

c) La lunghezza d'onda in guida vale (mezzo 1):

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Perché la lunghezza d'onda sia massima, il denominatore deve essere minino, il che si ottiene per la frequenza di taglio più vicina possibile alla *f* del segnale, ossia per i modi TE_{21} e TM_{21} per cui f_c = 5.3 GHz. In questo caso $\lambda_g = 6.6$ cm.

d) La velocità di gruppo in guida vale (mezzo 1):

$$v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Perché la velocità di gruppo sia massima, la frequenza di taglio deve essere più lontana possibile alla *f* del segnale, ossia per il modo TE_{10} per cui f_c = 1.88 GHz. In questo caso $\lambda_g = 2.89\times10^8$ m/s.