Onde Elettromagnetiche e Ottica (Mod 1) – Prof. C. Capsoni
Prova del 1 febbraio 2011

1	2	3

non scrivere nella zona soprastante

COGNOME E NOME ____________________

MATRICOLA ____________________

FIRMA ____________________

Esercizio 1

Sia data un'onda piana uniforme che si propaga in un mezzo senza perdite alla frequenza f = 100 MHz. Il campo magnetico associato all'onda ha la seguente espressione:

$$\vec{H}(x,y,z) = \left(-10j\vec{\mu}_x + 9.4\vec{\mu}_y - 3.42\vec{\mu}_z\right)e^{-j4\pi(0.94z+0.34y)} \qquad \text{[mA/m]}$$

Per tale onda, determinare:

a) il modulo di $\vec{H}$
b) la direzione (ossia l'angolo rispetto a un dato sistema di riferimento cartesiano) e il verso di propagazione;
c) la costante dielettrica relativa del mezzo in cui si propaga (mezzo non magnetico);
d) l'espressione del campo elettrico associato;
e) FACOLTATIVO: la lunghezza d'onda in direzione z;
f) FACOLTATIVO: la polarizzazione dell'onda è lineare, circolare o ellittica (spiegare il perché)?

Soluzione:

a) Il modulo di $\vec{H}$ vale:

$$\left|\vec{H}(x,y,z)\right| = \left|\left(-10j\vec{\mu}_x + 9.4\vec{\mu}_y - 3.42\vec{\mu}_z\right)\right| = \sqrt{10^2 + 9.4^2 + 3.42^2} \approx 14.1 \text{ mA/m}$$

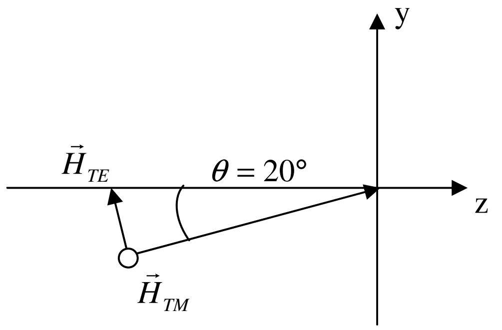
b) e c) La direzione e il verso di propagazione dell'onda, così come la costante dielettrica, discendono dal seguente confronto:

$$e^{-j4\pi(0.94z+0.34y)} = e^{-j\beta(\cos(\theta)z+\sin(\theta)y)}$$

da cui:

$$\begin{cases}\beta\cos(\theta) = 3.76\pi \\ \beta\sin(\theta) = 1.36\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tan(\theta) = 0.3617 \\ \dfrac{2\pi f}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\sin(\theta) = 1.36\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta \approx 20° \\ \sqrt{\varepsilon_r} \approx 5.96\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\theta \approx 20° \\ \sqrt{\varepsilon_r} \approx 35.5\end{cases}$$

Dunque, tenendo conto di questi risultati, la geometria del problema è la seguente:



Si noti che sono state indicate come $\vec{H}_{TE}$ e $\vec{H}_{TM}$, rispettivamente la componente di $\vec{H}$ che giace sul piano *yz* (ed è quindi associata a un campo elettrico TE) e che è ortogonale al piano *yz* (ed è quindi associata a un campo elettrico TM).

c) Il campo elettrico associato si può calcolare separatamente per le 2 componenti di $\vec{H}$.
Per $\vec{H}_{TE} = 9.4\vec{\mu}_y - 3.42\vec{\mu}_z$ mA/m (il cui modulo vale 10 mA/m):

$$\vec{E}_{TE} = 10 \cdot 10^{-3} \eta\, \vec{\mu}_x = 10 \cdot 10^{-3} \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \vec{\mu}_x = 0.633 \vec{\mu}_x \quad \text{[V/m]}$$

con $\eta_0 \approx 377\ \Omega$

$\vec{H}_{TM} = -10 j \vec{\mu}_x$ mA/m (il cui modulo vale ancora 10 mA/m):

$$\vec{E}_{TM} = j10 \cdot 10^{-3} \eta \left(\cos 20° \,\vec{\mu}_y - \sin 20° \,\vec{\mu}_z \right) = j0.594 \vec{\mu}_y - j0.216 \vec{\mu}_z \quad \text{[V/m]}$$

Il campo elettrico totale sarà dunque:

$$\vec{E} = \left(0.633 \vec{\mu}_x + j0.594 \vec{\mu}_y - j0.216 \vec{\mu}_z \right) e^{-j4\pi(0.94z + 0.34y)} \quad \text{[V/m]}$$

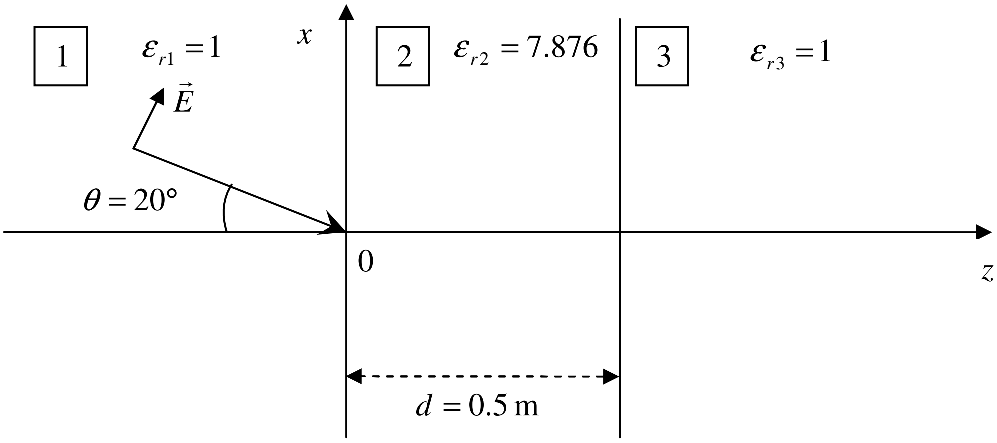
d) FACOLTATIVO:La lunghezza d'onda in direzione z vale:

$$\lambda_x = \lambda / \cos(\theta) = \frac{\lambda_0}{\cos(\theta)\sqrt{\varepsilon_r}} = 0.536 \text{ m}$$

e) FACOLTATIVO: I moduli della componente TE e TM di campo elettrico valgono entrambi 0.632 V/m e le due componenti sono sfasate di $\pi/2$, per cui la polarizzazione sarà circolare.

Esercizio 2

Un'onda piana uniforme, alla frequenza di 2.155 GHz incide su una lastra di vetro ($\varepsilon_{r2} = 7.876$, materiale non magnetico senza perdite, angolo di incidenza $\theta = 20°$) immersa nel vuoto. Il fasore campo elettrico è orientato come in figura, ha modulo 10 V/m e fase nulla nell'origine degli assi (0,0,0).



Calcolare:

a) il coefficiente di riflessione per $z = 0^-$ (cioè relativo al mezzo 1);
b) la densità di potenza che attraversa la lastra di vetro in direzione z;
c) il fasore campo elettrico totale nel punto (0,0,0).

Soluzione:

a) Si applica la legge di Snell per identificare gli angoli di propagazione nei vari mezzi:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 \approx 7°$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3 \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \theta_1 = 20°$$

Per avere il coefficiente di riflessione all'interfaccia nel mezzo 1, bisogna riportare l'impedenza dell'ultimo mezzo a tale interfaccia applicando il modello a linee di trasmissione. Si calcolino innanzitutto le impedenze per i vari mezzi (si tenga conto che è un'onda TM).

$$\eta_{TM}^1 = \eta_{TM}^3 = \eta_0 \cos\theta_1 = 354.3\ \Omega$$

$$\eta_{TM}^2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{7.876}} \cos\theta_2 = 133.3\ \Omega$$

Per ottenere la distanza normalizzata:

$$\lambda_{2,z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{7.876}} \frac{1}{\cos\theta_2} = 0.05\ \text{m} \Rightarrow \bar{d} = \frac{d}{\lambda_{2,z}} = 10$$

Poiché si ha una distanza normalizzata multipla di 0.5, η_{TM}^3 può essere riportata all'interfaccia fra mezzo 1 e 2 (sezione AA) e dunque $\eta_{AA} = \eta_{TM}^3$, da cui, ovviamente, il coefficiente di riflessione richiesto al punto a) vale 0, ossia non ci sono riflessioni.

b) Essendo nullo il coefficiente di riflessione, tutta la potenza incidente in direzione z è trasmessa oltre la lastra:

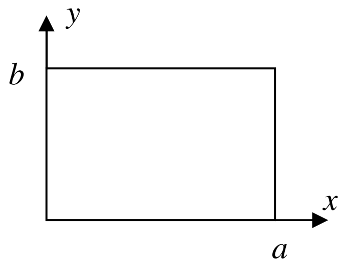
$$S_z^t = S_z^i(1-|\Gamma_{AA}|^2) = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{\eta_0}\cos(\theta_1) \approx 0.125 \ \text{W/m}^2$$

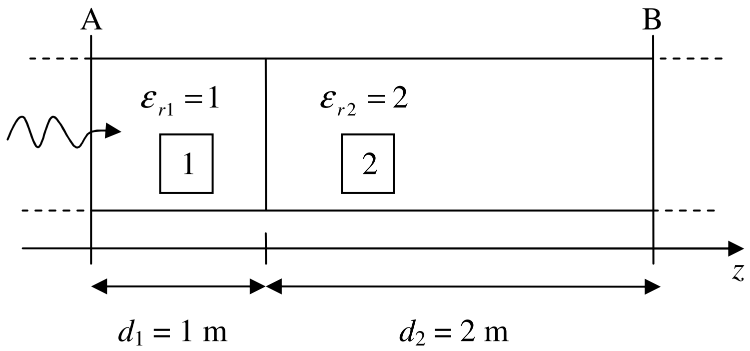
c) Anche questa risposta è immediata: non essendoci riflessione il campo totale è il solo campo incidente:

$$\vec{E}_T(0,0,0) = \vec{E}_i(0,0,0) + \vec{E}_r(0,0,0) = \vec{E}_i(0,0) = 10(\cos(\theta)\vec{\mu}_x + \sin(\theta)\vec{\mu}_z) = 9.34\vec{\mu}_x + 3.42\vec{\mu}_z \ \text{V/m}$$

Esercizio 3

Sia data una guida d'onda con dimensioni a = 8 cm e b = 4 cm. Il modo TE_{10} alla frequenza di f_0 = 2 GHz (potenza associata pari a 1 W) si propaga in guida e incide sulla discontinuità fra due mezzi come indicato in figura.





Calcolare:

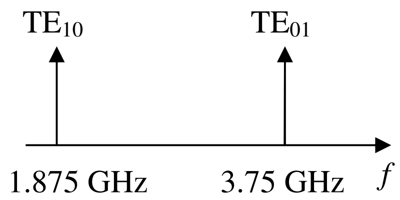
a) la massima banda monomodale della guida;
b) la lunghezza d'onda dal modo TE_{10} (entrambi i mezzi);
c) la potenza trasmessa nel mezzo 2;
d) FACOLTATIVO: un valore di a per cui il modo TE_{10} non si possa più propagare in guida.

Soluzione:

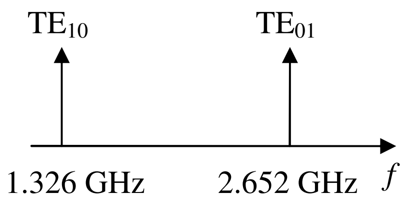
a) Dato che $b = a/2$, la massima banda monomodale è assicurata e il modo TE_{01} coincide con il TE_{20}. Vanno calcolate le frequenze di taglio dei due modi per i due mezzi.

$$f_c^{TE10} = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad f_c^{TE20} = f_c^{TE01} = \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Per il mezzo **1**:



Per il mezzo **2**:



Dunque la banda monomodale della guida, considerando quindi entrambi i mezzi, è $(2.652 \cdot 10^9 - 1.875 \cdot 10^9) = 0.777\,\text{GHz}$ e dunque il modo TE_{10} si propaga nella guida.

b) $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}}$

Per il mezzo 1:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1.875}{2}\right)^2}} = 0.43 \text{ m}$$

Per il mezzo 2:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1.326}{2}\right)^2}} = 0.14 \text{ m}$$

c) Si calcolino dapprima le impedenze dei mezzi:

$$\eta^1_{TE10} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1.875}{2}\right)^2}} = 1083.4 \ \Omega$$

$$\eta^2_{TE10} = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1.326}{2}\right)^2}} = 356.1 \ \Omega$$

Poi il modulo del coefficiente di riflessione:

$$|\Gamma| = \left| \frac{\eta^2_{TE10} - \eta^1_{TE10}}{\eta^2_{TE10} + \eta^1_{TE10}} \right| = 0.505$$

La potenza trasmessa nel mezzo 2 vale:

$$P_2 = P_1\left(1-|\Gamma|^2\right) = 0.745 \text{ W}$$

d) FACOLTATIVO: Perché il modo TE_{10} non si propaghi più in guida deve essere (con riferimento al mezzo 1 perché il mezzo 2 ha una frequenza di taglio per TE_{10} sempre inferiore a quella del mezzo 2).

$$f_c^{TE10} = \frac{c}{2a} > f_0 \Rightarrow a < \frac{c}{2f_0} = 7.5 \text{ cm}$$

Ad esempio a = 7 cm soddisfa la richiesta.